Calculs de limites

V. Bansaye, M. Bouvel

Niveau : Première
Difficulté : ★
Durée : 2h
Rubrique(s) : Analyse (Calculs de limites)

Exercice 1 (Échauffement).
Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+2}$.

2. $\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x^2-4}$.

3. $\lim_{x\to +\infty} x^4 - x$.

4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}+1}$.

5. $\lim_{x\to -\infty} -3x^2$.

6. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$.

7. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2}{x^2-3x+2}$.

8. $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+4} - 4x$.

9. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$.

Exercice 2 (Calcul de $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ par trois méthodes).
1.a. Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\sin x \leq x.$$

1.b. Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3.$$

1.c. En déduire que

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

puis

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. Nous allons maintenant établir cette limite par une méthode géométrique. Soit $x \in]0, \pi/2[$. Soit O l'origine d'un repère orthonormé et I le point de coordonnées $(1, 0)$. On note M le point du cercle unité tel que l'angle entre $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$ vaut x et P la projection orthogonale de M sur (OI). On note enfin T le point de coordonnées $(1, \tan x)$.

a. Utiliser les aires de deux triangles et d'un secteur circulaire pour montrer que
$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x).$$

b. En déduire que
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

3. Déterminer cette limite en revenant à la définition du nombre dérivé.

Exercice 3 (Comparaison d'ordres de grandeur).
Soit $a \in \mathbb{N}$. Quelle quantité grandit le plus vite entre a^n, $n!$ et n^n quand n tend vers l'infini ?
On cherchera à calculer
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!}, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n}.$$
On rappelle que $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2 \times 1$, $3! = 3 \times 2 \times 1$ et de façon plus générale $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$.

Exercice 4 (Deux limites plus difficiles).
Déterminer les limites suivantes

1. $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

2. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (x^3 + 1)^{1/3} - x.$

Exercice 5 (Équivalent de $\cos(x)$ en 0).
Montrer que, pour tout réel x,
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$
En déduire que
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Indications

Indications sur l'Exercice 1

6. On pourra multiplier par la quantité conjuguée.

7. Mettre en facteur $x-2$ au numérateur et au dénominateur.

Indications sur l'Exercice 4

1. $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière de a. Cela signifie que $\lfloor a \rfloor$ est l'entier obtenu en enlevant ce qui se trouve après la virgule dans la représentation décimale de a. En d'autres termes (et plus formellement), $\lfloor a \rfloor$ est l'entier naturel n tel que $n \leq a$ et $n > a-1$.

2. Pour la seconde, on pourra utiliser une forme conjuguée pour les racines cubiques en commençant par factoriser $a^3 - b^3$.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. Ce n'est pas une forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{1+1}{1+2} = \dfrac{2}{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2^-} x+1 = 3$. De plus, $\lim\limits_{x\to 2^-} x^2-4 = 0$ et x^2-4 est négatif à gauche de 2. D'où $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x^2-4} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x^2-4} = -\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^4 - x = \lim\limits_{x\to +\infty} x(x^3-1) = +\infty$ par produit (les deux termes tendent vers $+\infty$).

4. On factorise le dénominateur par son terme de plus haut degré :

$$\frac{x}{\sqrt{x}+1} = \frac{x}{\sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{\sqrt{x}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}+1} = +\infty$.

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to -\infty} -3x^2 = -\infty$.

6. En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1} &= \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{(x+2)-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}.\end{aligned}$$

Sous cette forme finale, le dénominateur tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x+1} = 0.$$

7. C'est une forme indéterminée de la forme $\dfrac{0}{0}$: il faut lever l'indétermination. Numérateur et dénominateur s'annulant en $x=2$, on peut y mettre en facteur $x-2$. On remarque que, pour tout x qui n'annule pas le dénominateur,

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-3x+2} = \frac{x^2(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2}{x-1},$$

donc $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-3x+2} = \dfrac{2^2}{2-1} = 4$.

8. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2+4 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+4} = +\infty$.
De plus, $\lim\limits_{x\to -\infty} -4x = +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+4} - 4x = +\infty$.

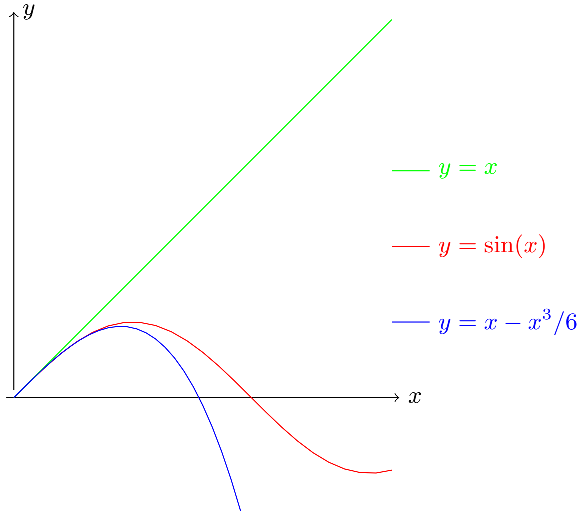
9. C'est une forme indéterminée de la forme $\dfrac{0}{0}$. On remarque que, pour tout x positif qui n'annule pas le dénominateur,

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(x-4)(x-1)} = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x-1)} = \frac{1}{(\sqrt{x}+2)(x-1)}.$$

D'où $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \dfrac{1}{(\sqrt{4}+2)(4-1)} = \dfrac{1}{12}$.

□

Correction de l'Exercice 2



1.a.
Définissons la fonction f sur $\mathbb{R}$ par, pour tout réel x, $f(x) = x - \sin(x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 1 - \cos(x)$. Ainsi, f' est positive sur $\mathbb{R}$ et donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0)$, c'est-à-dire que, pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$.
1.b. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^+$ en posant, pour tout réel positif x, $g(x) = \sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6}$. Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout réel positif x, on a $g'(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ et $g''(x) = -\sin(x) + x = -f(x)$. Donc g'' est positive sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	
$g'(x)$	0 ↗	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	0 ↗	

g' est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et, comme $g'(0) = 0$, on obtient que g' est positive sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et, comme $g(0) = 0$, on conclut que g est positive sur $\mathbb{R}^+$.

En d'autres termes, pour tout réel positif x, $g(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire que, pour tout réel positif x, $\sin(x) \geqslant x - \dfrac{x^3}{6}$.

1.c. Avec les questions précédentes, pour tout $x \geq 0$, on a $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin(x) \leq x$. Donc,

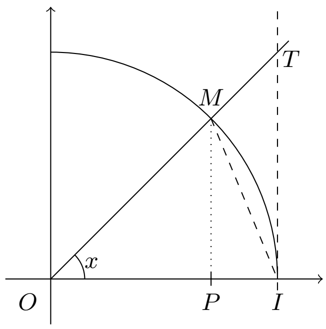
$$\text{pour tout } x > 0, \quad 1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Comme $\lim_{x \to 0^+} 1 = \lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{x^2}{6} = 1$, le théorème des gendarmes assure que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Remarquons alors que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin(x)}{-x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}.$$

On vient d'utiliser la parité de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.
Ainsi, les limites de $\frac{\sin(x)}{x}$ en 0^+ et 0^- sont égales entre elles, et égales à 1. On conclut donc que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

2. Faisons d'abord un dessin.



a. Le secteur angulaire OIM a pour aire $\frac{x}{2\pi} \times \pi \times |OM|^2 = \frac{x}{2}$. Ce secteur angulaire contient tout le triangle OMI et est entièrement contenu dans le triangle OIT. Ainsi, on a

$$\text{Aire du triangle } OMI \leq \frac{x}{2} \leq \text{Aire du triangle } OIT.$$

Le triangle OMI a pour base OI et pour hauteur MP. Son aire est donc $\frac{|OI| \times |MP|}{2}$. Et comme $|OI| = 1$ et $|MP| = \sin(x)$, on trouve que l'aire du triangle OMI est $\frac{\sin(x)}{2}$.
D'autre part, le triangle OIT est rectangle en I, le côté OI a pour longueur 1 et le côté IT a pour longueur $\tan(x)$. Ainsi, il a pour aire $\frac{\tan(x)}{2}$.
On obtient donc $\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$, c'est-à-dire que $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

b. Soit $x \in]0; \pi/2[$. On déduit de l'inégalité ci-dessus que $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ et $\frac{\tan(x)}{x} \geq 1$. Or $\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x}$. On en déduit que $\frac{\sin x}{x \cos x} \geq 1$ et donc que $\frac{\sin x}{x} \geq \cos x$. En résumé on a, pour tout $x \in]0; \pi/2[$,

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Et, comme $\lim_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$, le théorème des gendarmes assure que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

3. Par définition du nombre dérivé, en tout réel a, on a :

$$\lim_{x\to a}\frac{sin(x)-\sin(a)}{x-a}=\cos(a).$$

En appliquant cette définition en $a=0$, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}=1$.

□

Correction de l'Exercice 3

L'objectif de cet exercice est de démontrer que n^n croît plus vite que $n!$, qui lui même croît plus vite que a^n (pour n'importe quel entier naturel a). Pour cela, on montre que :

$$\textbf{1)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0,\qquad \text{et}\qquad \textbf{2)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

1. Fixons un entier naturel a, que l'on suppose supérieur ou égal à 2 (la limite de $\frac{a^n}{n!}$ étant à l'évidence 0 lorsque a vaut 0 ou 1). Soit n un entier naturel, $n>a$. On peut alors écrire que :

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a^a}{a!}\times\frac{a^{n-a}}{(a+1)\times\cdots\times n}=\frac{a^a}{a!}\times\frac{a}{a+1}\times\frac{a}{a+2}\times\cdots\times\frac{a}{n}\leq\frac{a^a}{a!}\times\frac{a}{n}$$

puisque tous les autres termes de ce produit sont inférieurs à 1. Ainsi, $\dfrac{a^n}{n!}\leq\dfrac{c}{n}$ où $c=\dfrac{a^a}{a!}\times a$ dépend seulement de a (et pas de n). Enfin, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{c}{n}=0$, et comme pour tout entier naturel n, $\dfrac{a^n}{n!}\geq 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

2. Soit n un entier naturel, supérieur ou égal à 2. On a :

$$0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n}\leq\frac{1}{n}.$$

En effet, chaque des quantités $\dfrac{j}{n}$ pour j entier entre 2 et n est inférieure ou égale à 1. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et que $\dfrac{n!}{n^n}\geq 0$ pour tout n, le théorème des gendarmes assure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

□

Correction de l'Exercice 4

1. Soit $x>0$. Par définition de la partie entière, on a $\dfrac{1}{x}-1<\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\leq\dfrac{1}{x}$. On en déduit que

$$x\left(\frac{1}{x}-1\right)<x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leq x\,\frac{1}{x}\quad\text{c'est-à-dire que}\quad 1-x<x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leq 1.$$

Par le théorème des gendarmes, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor=1$.

2. Pour tout réels a et b, on a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. En choisissant $a = (x^3+1)^{1/3}$ et $b = x$, on peut donc écrire que

$$1 = (x^3+1) - x^3 = \left((x^3+1)^{1/3} - x\right)\left((x^3+1)^{2/3} + (x^3+1)^{1/3}x + x^2\right).$$

Ainsi, pour tout x tel que $(x^3+1)^{2/3} + (x^3+1)^{1/3}x + x^2 \neq 0$, on a :

$$(x^3+1)^{1/3} - x = \frac{1}{(x^3+1)^{2/3} + (x^3+1)^{1/3}x + x^2}.$$

Or, lorsque x tend vers $+\infty$, le dénominateur de l'expression ci-dessus tend vers $+\infty$. On en conclut que $\lim_{x\to+\infty} (x^3+1)^{1/3} - x = 0$.

$\square$

Correction de l'Exercice 5

On adopte la même méthode que dans l'exercice 2.

Définissons la fonction h sur $\mathbb{R}$ par, pour tout réel x, $h(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$. Remarquons que $h = -g'$, où g (et g') sont définies dans la question **1.b)** de l'exercice 2. Dans cet exercice, nous avons montré que g' est négative sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, h est positive sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire que pour tout $x \geq 0$, $h(x) \geq 0$. Remarquons que la fonction h est paire (ce qui signifie que pour tout réel x, $h(x) = h(-x)$). On en déduit que pour tout $x \leq 0$, $h(x) = h(-x) \geq 0$ en appliquant la propriété précédente. En conclusion, on obtient donc que, pour tout réel x, $1 - x^2/2 \leq \cos(x)$.

Définissons ensuite la fonction v sur $\mathbb{R}$ par, pour tout réel x, $v(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos(x)$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x, $v'(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$. On remarque alors que $v' = -g$, où g est la même fonction définie à l'exercice 2, question **1.b)**. On y a démontré que g est négative sur $\mathbb{R}^+$, donc v' est positive sur $\mathbb{R}^+$, et ainsi v est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On obtient donc que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $v(x) \geq v(0)$, c'est-à-dire que, pour tout $x \geq 0$, $v(x) \geq 0$. Comme ci-dessus, en remarquant que v est une fonction paire, on en déduit que, pour tout réel x, $v(x) \geq 0$, c'est-à-dire que, pour tout réel x, $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

En conclusion, on obtient bien que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x^2/2 \leq \cos(x) \leq 1 - x^2/2 + x^4/24.$$

En manipulant ces inégalités, on déduit que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \frac{1}{2} \geq \frac{1-\cos(x)}{x^2} \geq \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24},$$

et le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

