Dérivation

A. Camanes, M. Bouvel

Niveau : Première
Difficulté : ★ à ★★
Durée : 1h30
Rubrique(s) : Analyse (dérivation).

Exercice 1 (Calculs de dérivées).
Pour chacune des fonctions suivantes, vous donnerez le plus grand intervalle $\mathcal{D}_f$ sur lequel la fonction est définie , le plus grand intervalle $\mathcal{D}_{f'}$ sur lequel la fonction est dérivable et la valeur de la fonction dérivée.

$f_1(x) = 3x^2 + 5x^3 + 1$ $\qquad$ $f_2(x) = x^2 - 2x + 1$

$f_3(x) = \cos(2x) + \sin(-x)$ $\qquad$ $f_4(x) = \cos^2(3x)$

$f_5(x) = 3x\sin(4x) + 4x^3\cos^2(x) + 1$ $\qquad$ $f_6(x) = \cos^2(5x) - 2\cos(5x) + 1$

$f_7(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$ $\qquad$ $f_8(x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$

$f_9(x) = \sqrt{10x}$ $\qquad$ $f_{10}(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{-x+5}} - 3\cos(x)\sqrt{x}\cdot$

Exercice 2 (Inégalités).
Montrer, pour tout réel x positif , les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{lll} x - \frac{x^3}{6} & \leq \sin x & \leq x, \\ 1 - \frac{x^2}{2} & \leq \cos x & \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}. \end{array}$$

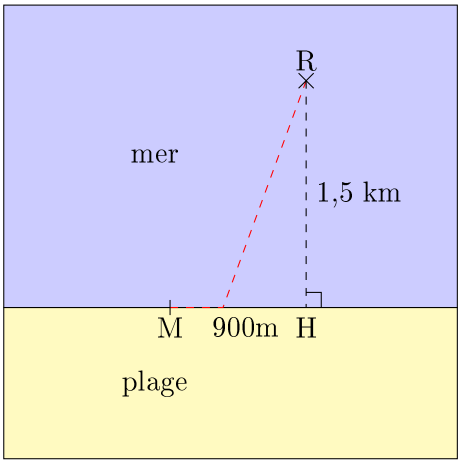
Exercice 3 (Tangentes & Concavité).
Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;\pi]$ par $f(x) = \sin x$. Soit a un réel de l'intervalle $[0;\pi]$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point a. Déterminer la position de cette tangente par rapport à la courbe.

Exercice 4 (Parité des dérivées).
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On rappelle que

- f est dite paire si pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.
- f est dite impaire si pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

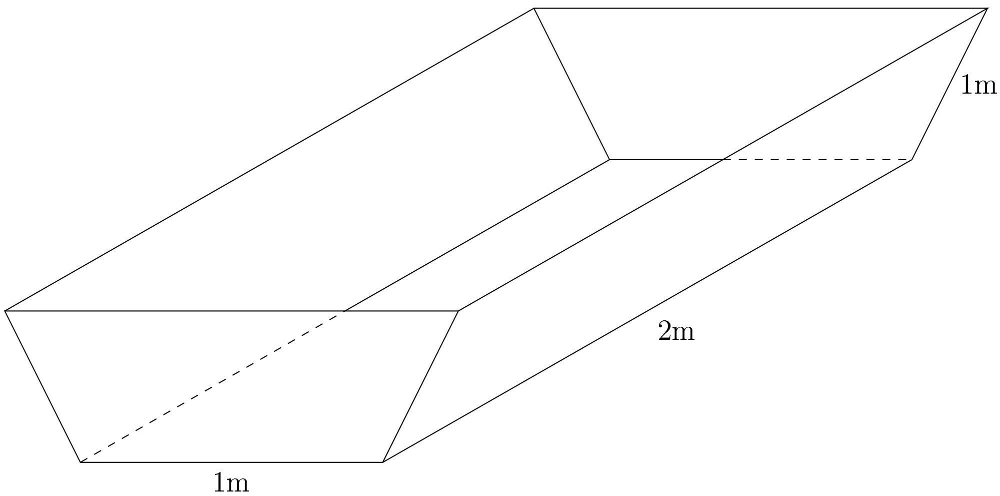
Montrer que la dérivée de toute fonction dérivable paire est impaire. Que dire de la dérivée des fonctions dérivables et impaires ?

Exercice 5 (Alerte).
Mitch, maître nageur, se promène sur une plage américaine. Au large, Pamela est sur un matelas pneumatique en perdition. Mitch doit aller sauver Pamela le plus rapidement possible. Quel est le temps minimal que cela va lui prendre, sachant que :



- Le front de mer est supposé rectiligne.
- Le matelas pneumatique est supposé immobile.
- Mitch se trouve initialement en bordure de mer.
- Mitch court à 13km/h sur la plage.
- Mitch nage à 5km/h dans la mer démontée.
- En notant R la position du matelas pneumatique, M la position initiale de Mitch et H le projeté orthogonal de R sur la plage, la distance RH vaut 1,5km et la distance MH vaut 900m.

Exercice 6 (L'agriculteur).
Il y a quelques années encore, dans les régions rurales, avait lieu la fête du cochon. À cette occasion, le cochon, engraissé tout au long de l'année précédente, était transformé en pâtés, saucisses et charcuteries diverses. Pour ce faire, le cochon était installé dans une maie. La maie est une grande bassine en bois qui a la forme d'un parallélépipède à base trapézoïdale régulière.



Un agriculteur désire construire une maie. Pour cela, il a à sa disposition deux planches de longueur 2m et de largeur 1m qui constitueront les côtés latéraux de la maie et une troisième planche de mêmes dimensions qui constituera le fond de la maie. Les deux côtés restants (les deux bases trapézoïdales) seront réalisés à l'aide de planches diverses. Quel est le volume maximal de la maie que peut construire le paysan ?

Indications

Indications sur l'Exercice 1

On pourra simplifier f_7 et f_8 avant de chercher à les dériver.

Indications sur l'Exercice 2

Etudier les variations des fonctions différences $f_1(x) = \sin(x) - x$, $f_2(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$, $f_3(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$ et finalement $f_4(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$.
Pour l'étude de f_2, commencer par les variations de f_2'.

Indications sur l'Exercice 5

On pourra exprimer le temps mis par Mitch en fonction de la distance x parcourue sur la plage.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

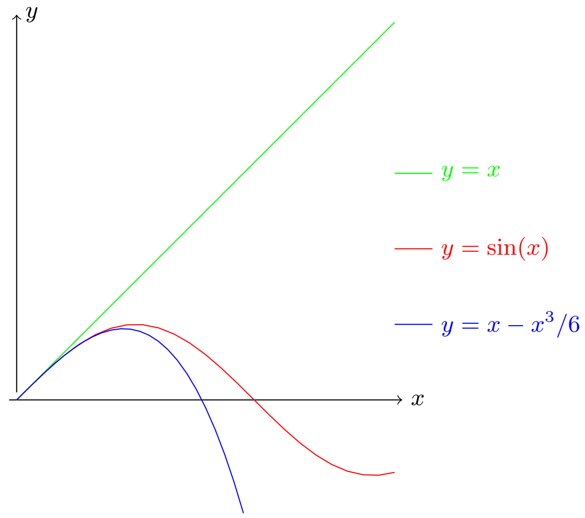
Pour chaque fonction f de l'énoncé, on donne $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_{f'}$ de f, et l'expression de sa dérivée (par les formules usuelles) dans le tableau suivant :

Fonction f	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_{f'}$	Dérivée
f_1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_1'(x) = 6x + 15x^2$
f_2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_2'(x) = 2x - 2$
f_3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_3'(x) = -2\sin(2x) - \cos(-x)$
f_4	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_4'(x) = -6\cos(3x)\sin(3x) = -3\sin(6x)$
f_5	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_5'(x) = 3\sin(4x) + 12x\cos(4x)$ $-8x^3\cos(x)\sin(x) + 12x^2\cos^2(x)$
f_6	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_6'(x) = -10(\cos(5x) - 1)\sin(5x)$
f_7	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_7'(x) = 0$
f_8	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_8'(x) = -3\sin(3x)$
f_9	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$	$f_9'(x) = \frac{-5}{\sqrt{10x}}$
f_{10}	$[0, 5[$	$]0, 5[$	$f_{10}'(x) = \frac{2x\sqrt{-x+5}+\frac{1}{2}x^2\frac{1}{\sqrt{-x+5}}}{-x+5}$ $+3\sin(x)\sqrt{x} - 3\cos(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque : Il est plus facile de traiter les cas de f_7 et f_8 en remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_7(x) = 1$ et $f_8(x) = \cos(3x)$.

$\square$

Correction de l'Exercice 2



On définit la fonction f_1 sur $\mathbb{R}^+$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_1(x) = \sin(x) - x$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f_1'(x) = \cos(x) - 1$. Donc f_1' est négative sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que f_1 est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et comme $f_1(0) = 0$,

on obtient que f_1 est négative sur $\mathbb{R}^+$. En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_1(x) \leqslant 0$ c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sin(x) \leqslant x$.
On définit la fonction f_2 sur $\mathbb{R}^+$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_2(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.
Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f_2'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$ et $f_2''(x) = -\sin(x) + x = -f_1(x)$. Donc f_2'' est positive sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f_2''(x)$	$+$
$f_2'(x)$	$0 \nearrow +\infty$
$f_2'(x)$	$+$
$f_2(x)$	$0 \nearrow$

f_2' est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et comme $f_2'(0) = 0$, on obtient que f_2' est positive sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, f_2 est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et comme $f_2(0) = 0$, on conclut que f_2 est positive sur $\mathbb{R}^+$.

En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_2(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}$.
Ces deux points démontrent la première inégalité : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

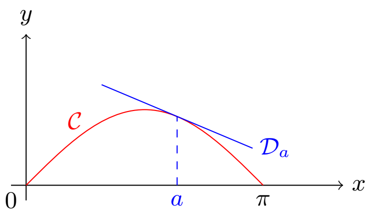
De la même façon, on définit la fonction f_3 sur $\mathbb{R}^+$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$f_3(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_3(x) = f_2'(x)$. On a montré ci-dessus que f_2' est positive sur $\mathbb{R}^+$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.
On définit la fonction f_4 sur $\mathbb{R}^+$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_4(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$f_4'(x) = -\sin(x) + x - \frac{x^3}{6} = -f_2(x)$$

Par l'étude de f_2 menée ci-dessus, f_4' est négative sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, f_4 est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et comme $f_4(0) = 0$, on conclut que f_4 est négative sur $\mathbb{R}^+$. En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_4(x) \leqslant 0$ c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\cos(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.
Ces deux points démontrent la seconde inégalité :
pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

$\square$

Correction de l'Exercice 3
Dans tout l'exercice, un réel $a \in [0; \pi]$ est fixé (mais quelconque dans cet intervalle).
La fonction f étant dérivable en a, la tangente $\mathcal{D}_a$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Dans cet exercice, f est la fonction sin sur l'intervalle $[0, \pi]$. Ainsi, $\mathcal{D}_a$ a pour équation $y = \cos(a)(x - a) + \sin(a)$. Faisons un petit dessin.



On voudrait montrer que la tangente $\mathcal{D}_a$ est située au-dessus de la courbe $\mathcal{C}$. Pour cela, il suffit de démontrer que pour tout $x \in [0;\pi]$, $\sin(x) \leqslant \cos(a)(x-a)+\sin(a)$. (remarque : le cas particulier $a=0$ a été traité dans l'exercice précédent).
Pour cela, on définit la fonction g sur $[0;\pi]$ par

$$g(x) = \sin(x) - \cos(a)(x-a) - \sin(a)$$

et on étudie les variations de g. La fonction g est dérivable sur $[0;\pi]$ et pour tout $x \in [0;\pi]$, $g'(x) = \cos(x) - \cos(a)$. La fonction cos étant décroissante sur $[0;\pi]$, on peut établir le tableau de variations de g :

x	0		a		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	g(0)	$\nearrow$	$g(a)=0$	$\searrow$	$g(\pi)$

On en déduit que, pour tout $x \in [0;\pi]$, $g(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire que, pour tout $x \in [0;\pi]$, $\sin(x) \leqslant \cos(a)(x-a)+\sin(a)$.
On conclut que la tangente $\mathcal{D}_a$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}$.
Remarque. Dans cet exercice, on a donc démontré que la fonction f est *concave*. En effet, une fonction dérivable concave est caractérisée par la propriété suivante : la tangente à sa courbe représentative en tout point de son intervalle de définition se situe au-dessus de la courbe.

$\square$

Correction de l'Exercice 4
Considérons une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors par définition, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(-a) &= \lim_{x\to -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(-x)-f(-a)}{-x-(-a)} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(-x)-f(-a)}{-x+a} = \lim_{x\to a} -\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -f'(a) \end{aligned}$$

C'est dans l'égalité de la deuxième ligne que l'on utilise le fait que f est paire pour remplacer $f(-x)$ et $f(-a)$ par $f(x)$ et $f(a)$ respectivement. Les autres inégalités sont seulement des manipulations de limites et de la définition de la dérivée.
Lorsque f est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$, on a donc pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(-a) = -f'(a)$, c'est-à-dire que f' est impaire.
De même, on montre que pour toute fonction g qui est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée g' est paire. En effet, pour une telle fonction g, on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f'(-a) &= \lim_{x\to -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(-x)-f(-a)}{-x-(-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(-x)-f(-a)}{-x+a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{-f(x)+f(a)}{-x+a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)\end{aligned}$$

□

Correction de l'Exercice 5
Le temps (en heures) que Mitch met à atteindre le matelas pneumatique (c'est-à-dire le point R) est donné par la formule suivante :

$$\frac{\text{distance parcourue sur la plage}}{\text{vitesse sur la plage}} + \frac{\text{distance parcourue dans la mer}}{\text{vitesse dans la mer}}.$$

En notant x la distance en km que Mitch parcourt sur la plage, la distance parcourue en mer vaut $\sqrt{(0.9-x)^2+(1.5)^2}$ par le théorème de Pythagore. C'est-à-dire que le temps mis par Mitch est donné par la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{13} + \frac{\sqrt{(0.9-x)^2+(1.5)^2}}{5} = \frac{x}{13} + \frac{\sqrt{x^2-1.8x+3.06}}{5}.$$

Pour chercher le temps minimal que va mettre Mitch pour atteindre le matelas pneumatique, on cherche donc le minimum de $f(x)$ lorsque x varie entre 0 et 0.9. Pour ce faire, on étudie les variations de f.
La fonction f est dérivable sur $[0;9]$ et pour tout $x \in [0;0.9]$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{13} + \frac{1}{5}\frac{1}{2}\frac{2x-1.8}{\sqrt{x^2-1.8x+3.06}} = \frac{1}{13} + \frac{x-0.9}{5\sqrt{x^2-1.8x+3.06}}.$$

Pour chercher un optimum de f, on résout l'équation $f'(x) = 0$ sur $[0;0.9]$. On rappelle que pour tout x, $x^2 - 1.8x + 3.06 = (0.9-x)^2 + (1.5)^2 > 0$.

$$\begin{aligned}f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{13} = \frac{0.9-x}{5\sqrt{x^2-1.8x+3.06}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{169} = \frac{(0.9-x)^2}{25(x^2-1.8x+3.06)} \text{ et } x < 0.9 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1.8x + 0.81 = \frac{25}{169}(x^2-1.8x+3.06) \text{ et } x < 0.9 \\ &\Leftrightarrow \frac{144}{169}x^2 - 1.8 \times \frac{144}{169}x + \frac{6039}{16900} = 0 \text{ et } x < 0.9\end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme du second degré est

$$\Delta = (-1.8 \times \frac{144}{169})^2 - 4 \times \frac{144}{169} \times \frac{6039}{16900} = \frac{32400}{28561} > 0.$$

Il admet donc deux solutions $x_1 = \frac{1.8\times\frac{144}{169}+\sqrt{\frac{32400}{28561}}}{2\times\frac{144}{169}} = 1.525$ et $x_2 = \frac{1.8\times\frac{144}{169}-\sqrt{\frac{32400}{28561}}}{2\times\frac{144}{169}} = 0.275$.
Le trinôme a donc une unique racine ($x_2 = 0.275$) dans l'intervalle $[0;0.9]$.
Ainsi, sur l'intervalle $[0;0.9]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.275$. Cette valeur de x correspond donc à un optimum $f(0.275) = \frac{9}{26}$ pour la fonction f. Reste à determiner s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.
En reprenant les calculs précédents pour $x \in [0;0.9]$:

$$\begin{aligned}
f'(x) < 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{13} < \frac{0.9-x}{5\sqrt{x^2-1.8x+3.06}} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{169} < \frac{(0.9-x)^2}{25(x^2-1.8x+3.06)} \text{ et } x < 0.9 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 1.8x + 0.81 > \frac{25}{169}(x^2-1.8x+3.06) \text{ et } x < 0.9 \\
&\Leftrightarrow \frac{144}{169}x^2 - 1.8\times\frac{144}{169}x + \frac{6039}{16900} > 0 \text{ et } x < 0.9
\end{aligned}$$

Or le trinôme $\frac{144}{169}x^2 - 1.8\times\frac{144}{169}x + \frac{6039}{16900}$ est positif à l'extèrieur de l'intervalle formé par les racines x_2 et x_1. D'après ce qui précède, et sachant que $x_1 > 0.9$, le tableau de variations de f est :

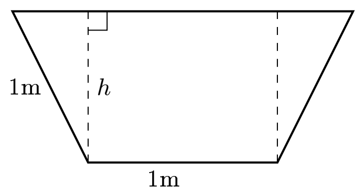
x	0		0.275		0.9
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	f(0)	$\searrow$	$\frac{9}{26}$	$\nearrow$	$f(0.9)$

La fonction f atteint donc son minimum $\frac{9}{26}$, pour la valeur $x = 0.275$.

Mitch mettra donc $\frac{9}{26}\times 60$ minutes (soit un peu plus de 20 minutes) pour aller sauver Pamela, en parcourant 275 mètres sur la plage.

□

Correction de l'Exercice 6
On remarque que le volume de la maie est égal à l'aire du trapèze de base multipliée par la longueur qui, ici, vaut 2m. Ainsi, le volume sera maximal lorsque l'aire du trapèze sera maximale. Notons h la hauteur du trapèze.



Alors, l'aire $A(h)$ du trapèze est égale à l'aire du rectangle central + l'aire des triangles latéraux. En utilisant le théorème de Pythagore, l'aire de chacun des deux triangles latéraux est $\frac{h\cdot\sqrt{1-h^2}}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A(h) &= 1\cdot h + h\cdot\sqrt{1-h^2} \\ &= h(1+\sqrt{1-h^2}). \end{aligned}$$

La fonction A est continue et dérivable sur $[0;1[$ et pour tout $h\in[0;1[$,

$$\begin{aligned} A'(h) &= 1+\sqrt{1-h^2}+h\frac{-2h}{2\sqrt{1-h^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1-h^2}(\sqrt{1-h^2}+1)-h^2}{\sqrt{1-h^2}} \\ &= \frac{1-2h^2+\sqrt{1-h^2}}{\sqrt{1-h^2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, le numérateur $f(h)=1-2h^2+\sqrt{1-h^2}$ de A' est une fonction décroissante de h [1]. En outre, A' s'annule lorsque $f(h)=0$, et on a les équivalences suivantes (lorsque $h\in[0;1[$) :

$$f(h)=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-h^2}=2h^2-1 \Leftrightarrow 1-h^2=4h^4-4h^2+1 \Leftrightarrow 0=h^2(4h^2-3).$$

Ainsi, en notant $h_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$, on a $A'(h_0)=0$, A' est positive sur $[0;h_0]$ et négative sur $[h_0;1[$. Ainsi, la fonction A est croissante sur $[0;h_0]$ et décroissante sur $[h_0;1]$. La fonction A atteint donc son maximum en h_0 et l'aire maximale est alors $A(h_0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}$. Ainsi, le volume maximal de la maie vaut

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\ m^3.$$

□

1. On peut s'en convaincre directement en remarquant que chacun des termes de la somme est une fonction décroissante de h. Mais si on ne le voit pas, on peut calculer la dérivée de $f(h)$; on obtient $f'(h)=-4h-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$ et on remarque qu'elle est négative sur $[0;1[$.

