Fractions et puissances

L. Gerin, M. Bouvel

Niveau : Première, Terminale
Difficulté : ★★ à ★★★★★
Durée : 2h
Rubrique(s) : Analyse (Puissances, Fractions, Binôme de Newton).

La petite histoire...
Pour rappel. Il y a deux règles importantes à ne jamais oublier quand on manipule des puissances. Le mieux, c'est même de savoir les retrouver. La première concerne le produit de puissances. Si a et b sont des entiers naturels non nuls

$$x^a x^b = \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{a \text{ facteurs}} \times \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{b \text{ facteurs}} = \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{a+b \text{ facteurs}} = x^{a+b}.$$

La deuxième permet de calculer la puissance d'une puissance :

$$\begin{aligned}(x^a)^b = \left(\overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{a \text{ facteurs}}\right)^b &= \overbrace{\overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{a \text{ facteurs}} \times \cdots \times \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{a \text{ facteurs}}}^{b \text{ facteurs}} \\ &= \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{a \times b \text{ facteurs}} = x^{ab}.\end{aligned}$$

Ces règles restent valides si a et b sont des entiers relatifs.

Exercice 1 (Simplifications de puissances).

1. Simplifier $\frac{(2^{10})^2 \cdot 8^2}{4^{13}}$.

2. Exprimer sous forme de puissance de 10 le nombre $1000 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{10^{100}}$.

Exercice 2 (Comparaison de puissances).

1. Classer les nombres suivants par ordre croissant :

$$5^{38},\ (25^9)^2,\ 125^{15},\ 1\,000\,000\,000,\ (6^{15})^3.$$

2. Faire de même pour :

$$10^{30},\ 6^{10}(2^{10})^2,\ 2^{120},\ \sqrt{8^{60}}, 4^{(10^2)}, (4^{10})^2.$$

Exercice 3 (Comparaison de fractions).
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Classer les quantités suivantes par ordre croissant :

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{n-1}{(n+1)^2}, \quad \frac{n}{(n-1)^2}, \quad \frac{n}{n^2-1}, \quad \frac{n-1}{n^2}.$$

Exercice 4 (La formule du binôme de Newton).
(Exercice plus difficile. La question 5. est de niveau Terminale S.)
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle factorielle de n et on note $n!$, le nombre entier $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$. Par convention, $0! = 1$.
Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n.
On note $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Cette quantité se lit « k parmi n ».
Dans tout cet exercice, a et b désignent deux nombres réels.

1. Pour tout entier naturel n, calculer $\binom{n}{n}$ et $\binom{n}{0}$.

2. Calculer $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ et $\binom{2}{2}$. En déduire que

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2.$$

3. Calculer $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$. En déduire que

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3.$$

4. Montrer que si $n \geq 2$ est un entier naturel et si k est un entier compris entre 1 et $n-1$, alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

5. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Commentaires sur l'Exercice 4

L'égalité $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ est appelée « relation du triangle de Pascal », et la formule $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ démontrée dans cet exercice est connue sous le nom de « formule du binôme de Newton ».

Les nombres $\binom{n}{k}$ qui sont l'objet de cet exercice admettent en fait plusieurs définitions équivalentes. Ici, nous avons utilisé la définition par une formule. Il existe aussi une définition combinatoire : $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à exactement k éléments d'un ensemble de n éléments. Enfin, le programme de Première S propose une troisième définition de $\binom{n}{k}$, comme le nombre de chemins à exactement k succès dans un schéma de Bernoulli comprenant n épreuves. Même si cela n'est pas tout à fait évident, toutes ces définitions décrivent bien les mêmes nombres. (Et, pour aller plus loin, ce peut être un bon exercice de chercher pourquoi !)

Exercice 5 (Une suite croissante).
(Exercice plus difficile.)
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$u_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \text{ pour tout } n \geq 1.$$

On souhaite montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante en comparant u_{n+1} et u_n. Le problème c'est que u_{n+1} a plus de facteurs que u_n... mais ils sont tous plus petits.
Montrer que la suite est croissante.

Indications

Indications sur l'Exercice 1

2. Puisque $10^a \times 10^a = 10^{2a}$, alors pour quel a a-t-on $10^a \times 10^a = 10^{100}$?

Indications sur l'Exercice 2

2. Attention aux parenthèses ! Vérifier que les nombres $4^{(10^2)}$ et $(4^{10})^2$ sont différents. Les parenthèses sont donc absolument nécessaires dans ce cas, et écrire 4^{10^2} n'a pas de sens.

Indications sur l'Exercice 5

Utiliser la formule du binôme de Newton et comparer terme à terme.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. On remarque que $8 = 2^3$ et $4 = 2^2$. Ainsi,

$$\frac{(2^{10})^2 \cdot 8^2}{4^{13}} = \frac{2^{20} \cdot (2^3)^2}{(2^2)^{13}} = \frac{2^{20} \cdot 2^6}{2^{26}} = \frac{2^{26}}{2^{26}} = 1.$$

2. On remarque que $10^{50} \cdot 10^{50} = 10^{100}$. Ainsi, $\sqrt{10^{100}} = 10^{50}$ et

$$1000 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{10^{100}} = 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{50} = 10^{57}.$$

$\square$

Correction de l'Exercice 2

1. Le classement par ordre croissant des nombres proposés est

$$1\,000\,000\,000 < (25^9)^2 < 5^{38} < 125^{15} < (6^{15})^3.$$

En effet, on a les égalités et inégalités suivantes :

- $1\,000\,000\,000 = 10^9 = (2 \times 5)^9 = 2^9 \times 5^9 < 5^9 \times 5^9 = 5^{18}$;
- $(25^9)^2 = ((5^2)^9)^2 = 5^{2\times 9\times 2} = 5^{36}$;
- $125^{15} = (5^3)^{15} = 5^{3\times 15} = 5^{45}$;
- $(6^{15})^3 = 6^{45} > 5^{45}$.

2. Pour cette question, il est nécessaire de comparer des puissances de 2 et des puissances de 10. Pour ce faire, il est utile de savoir (par exemple) que $2^{10} = 1024 > 10^3 > 592 = 2^9$. Et si on ne le sait pas, il suffit de le calculer !

Le classement par ordre croissant des nombres proposés est

$$\left(4^{10}\right)^2 < 6^{10}(2^{10})^2 < \sqrt{8^{60}} < 10^{30} < 2^{120} < 4^{(10^2)}.$$

En effet, on a les égalités et inégalités suivantes :

- $\left(4^{10}\right)^2 = \left(2^{20}\right)^2 = 2^{40}$;
- $6^{10}(2^{10})^2 = 6^{10} \times 2^{20} > 4^{10} \times 2^{20} = 2^{20} \times 2^{20} = 2^{40}$;
- $6^{10}(2^{10})^2 = 6^{10} \times 2^{20} < 8^{10} \times 2^{20} = (2^3)^{10} \times 2^{20} = 2^{30} \times 2^{20} = 2^{50}$;
- $\sqrt{8^{60}} = 8^{30} = (2^3)^{30} = 2^{90}$;
- $10^{30} = (10^3)^{10} > (2^9)^{10} = 2^{90}$;
- $10^{30} = (10^3)^{10} < (2^{10})^{10} = 2^{100}$;
- $4^{(10^2)} = 4^{100} = (2^2)^{100} = 2^{200}$.

$\square$

Correction de l'Exercice 3

On peut commencer par se faire une idée de l'ordre dans lequel les quantités proposées sont classées, afin de le démontrer par la suite.

En remplaçant n par 2, les quantités proposées prennent des valeurs résumées dans le tableau suivant :

	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{(n+1)^2}$	$\frac{n}{(n-1)^2}$	$\frac{n}{n^2-1}$	$\frac{n-1}{n^2}$
$n=2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$

Comme on a de manière évidente $\frac{1}{9} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 2$, l'énoncé suggère que l'on ait la suite d'inégalités suivante pour tout $n \geqslant 2$:

$$\frac{n-1}{(n+1)^2} < \frac{n-1}{n^2} < \frac{1}{n} < \frac{n}{n^2-1} < \frac{n}{(n-1)^2}.$$

Nous avons **deviné** un ordre pour les quantités proposées. Mais il reste à le **démontrer**. Pour ce faire, on démontre tour à tour chacune des quatre inégalités qui le composent. Il est utile de rappeler ici quelques règles sur la manipulation d'inégalités.

- On peut multiplier (ou diviser) les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement positif, et on obtient une inégalité de même sens.
- On peut multiplier (ou diviser) les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement négatif, et on obtient une inégalité de sens contraire.
- Si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$, alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
- Si a et b sont deux réels tels que $a < b < 0$, alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

Avec ces quelques règles, démontrons maintenant les quatre inégalités qui nous intéressent. Soit n un entier, $n \geqslant 2$.

1. Montrons que $\frac{n-1}{(n+1)^2} < \frac{n-1}{n^2}$.
$(n+1) > n > 0$, donc $(n+1)^2 > n^2 > 0$, donc $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$, donc $\frac{n-1}{(n+1)^2} < \frac{n-1}{n^2}$ (en multipliant les deux membres par $n-1$, qui est bien strictement positif).

2. Montrons que $\frac{n-1}{n^2} < \frac{1}{n}$.
$\frac{n-1}{n^2} = \frac{n}{n^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ donc $\frac{n-1}{n^2} < \frac{1}{n}$.

3. Montrons que $\frac{1}{n} < \frac{n}{n^2-1}$.
$0 < n^2 - 1 < n^2$, donc $\frac{1}{n^2-1} > \frac{1}{n^2}$, donc $\frac{n}{n^2-1} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ (multiplication des deux membres par $n > 0$).

4. Montrons que $\frac{n}{n^2-1} < \frac{n}{(n-1)^2}$.
$\frac{n}{n^2-1} = \frac{n}{(n+1)(n-1)} = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n+1} < \frac{n}{n-1}\frac{1}{n-1} = \frac{n}{(n-1)^2}$.
Ci-dessus, nous avons utilisé que $\frac{n}{n-1}\frac{1}{n+1} < \frac{n}{n-1}\frac{1}{n-1}$. Pour s'en convaincre, on remarque qu'il s'agit de la multiplication par $\frac{n}{n-1} > 0$ de l'inégalité $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n-1}$, qui vient elle-même de l'inversion de $n+1 > n-1 > 0$.

Remarque. Il y a de nombreuses autres méthodes pour résoudre cet exercice. Par exemple, on peut comparer chacune des quantités proposées à $\frac{1}{n}$, comparer entre elles les expressions qui ont même nominateur ou même dénominateur, ...

□

Correction de l'Exercice 4

1. Par définition, pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

2. Par la question précédente, $\binom{2}{0} = 1$ et $\binom{2}{2} = 1$; et par définition, $\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!} = 2$.
L'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ peut donc s'écrire de manière équivalente sous la forme :

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2.$$

3. Par la première question, on a $\binom{3}{0} = 1$ et $\binom{3}{3} = 1$. Remarquons aussi que la définition de $\binom{n}{k}$ est symétrique en k et $n-k$, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$. Ainsi, on a $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3\cdot 2}{2} = 3$.
D'autre part, en développant $(a+b)^3$, on a

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3.$$

4. Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$ et k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. En particulier, $0 \leqslant k \leqslant n$, donc $\binom{n}{k}$ est bien défini. On a aussi $n-1 \geqslant 1$, $0 \leqslant k-1 \leqslant n-1$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$, donc $\binom{n-1}{k-1}$ et $\binom{n-1}{k}$ sont bien définis. Enfin, par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!k(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \frac{k+(n-k)}{(n-k)k} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \frac{n}{(n-k)k} \\
&= \frac{(n-1)!n}{(k-1)!k(n-k-1)!(n-k)} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

5. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Initialisation.

Pour $n = 0$, on a d'une part $(a+b)^0 = 1$, et d'autre part $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$, donc l'égalité proposée est vérifiée.

Hérédité.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 0, tel que l'on a l'égalité $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
Démontrons que l'on a alors $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^{n-i+1} b^i + b^{n+1} \text{ où on a posé } i = k+1 \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \text{ en renommant } i \text{ en } k \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^{n-k+1} b^k + b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ici, on voudrait utiliser le résultat de la question précédente. En effet, il peut être reformulé de la manière suivante : nous avons démontré que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout k compris entre 1 et n. On ne peut donc utiliser ce résultat dans le calcul ci-dessus que lorsque n est supérieur ou égal à 1. (La condition sur k est bien vérifiée pour chacun des termes de la somme.) Mais dans cette étape d'hérédité, on a supposé $n \geq 0$, et non $n \geq 1$. C'est pour cela que l'on distingue maintenant deux cas pour conclure : lorsque $n \geq 1$ et lorsque $n = 0$.
Si $n \geq 1$, on poursuit le calcul ci-dessus, en utilisant le résultat de la question précédente comme indiqué plus haut.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = \ldots &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \text{ par la question précédente} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k,
\end{aligned}$$

qui est l'égalité recherchée.
Si $n = 0$, l'égalité à démontrer est $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$, et on a bien

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b,$$

qui est l'égalité recherchée.
Ainsi, dans tous les cas, on a démontré l'égalité recherchée.
Conclusion.
En appliquant le principe de récurrence, on conclut que pour tout entier naturel n,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

$\square$

Correction de l'Exercice 5
On rappelle la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. En appliquant cette formule pour $a = 1$ et $b = \frac{1}{n}$ (resp. $\frac{1}{n+1}$), on obtient que

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \quad \text{et}$$
$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Travail de recherche au brouillon.
Pour démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 1$, il serait donc suffisant de démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, et pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leqslant \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}$.
Soient n et k deux entiers tels que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. On a la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leqslant \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} \leqslant \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!(n+1)^k} \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \leqslant \frac{1}{k!} \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+2)}{(n+1)^k} \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \leqslant \frac{n+1}{n+1} \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \dots \frac{n-k+2}{n+1} \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \leqslant \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \dots \frac{n-k+2}{n+1}.
\end{aligned}$$

Pour que la dernière inégalité soit vérifiée, il serait suffisant d'avoir la propriété suivante : pour tout j tel que $0 \leqslant j \leqslant k-2$, $\frac{n-j-1}{n} \leqslant \frac{n-j}{n+1}$. Fixons donc j tel que $0 \leqslant j \leqslant k-2$. On a alors la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{n-j-1}{n} \leqslant \frac{n-j}{n+1} &\Leftrightarrow \quad (n-j-1)(n+1) \leqslant n(n-j) \\
&\Leftrightarrow \quad n^2 - nj - j - 1 \leqslant n^2 - nj \\
&\Leftrightarrow \quad -j-1 \leqslant 0
\end{aligned}$$

Cette dernière assertion étant clairement vraie, on peut maintenant passer à la rédaction de la démonstration du fait que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.

Rédaction de la démonstration.
Soient n et k deux entiers naturels tels que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Soit aussi j un entier naturel tel que $0 \leqslant j \leqslant k-2$. Clairement, il est vrai que $-j-1 \leqslant 0$. On en déduit que $n^2 - nj - j - 1 \leqslant n^2 - nj$, c'est-à-dire en factorisant que $(n-j-1)(n+1) \leqslant n(n-j)$. Et en divisant cette inégalité par $n(n+1) > 0$, on obtient $\frac{n-j-1}{n} \leqslant \frac{n-j}{n+1}$.
Cette inégalité est valable pour tout j tel que $0 \leqslant j \leqslant k-2$. Et pour tout tel j, on a $\frac{n-j-1}{n} > \frac{n-k}{n} \geqslant 0$. En multipliant toutes ces inégalités pour j allant de 0 à $k-2$, on obtient donc

$$\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \leqslant \frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{n-k+2}{n+1},$$

et donc (en multipliant par $\frac{1}{k!} = \frac{1}{k!}\frac{n}{n} = \frac{1}{k!}\frac{n+1}{n+1}$ qui est strictement positif)

$$\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k} \leqslant \frac{1}{k!}\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)}{(n+1)^k}.$$

Les deux membres de cette inégalité peuvent se réécrire en utilisant les cœfficients binomiaux, et on obtient

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leqslant \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k}.$$

On déduit ainsi que pour tout $n \geq 1$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} = u_{n+1}.$$

Ceci permet de conclure que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

$\square$

