Identités remarquables et factorisation

M. Gentes, M. Bouvel

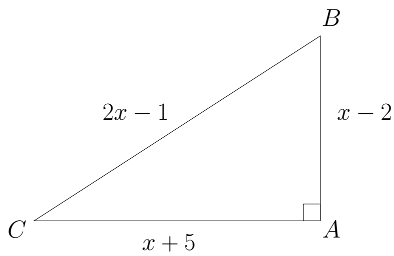
Niveau : Première
Difficulté : ★ à ★★★
Durée : 2h
Rubrique(s) : Analyse.

Exercice 1 (Factorisation et développement).
Pour tout nombre réel x, on pose $f(x) = (2x+5)(2x-4) - 3x^2 + 12$.

1.a. Factoriser cette expression.
b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2.a. Développer cette expression.
b. Retrouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2 (Un triangle rectangle).
Trouver les valeurs de x pour lesquelles le triangle ABC ci-dessous est rectangle en A.



Exercice 3 (Identité de Lagrange).
On dira qu'un entier naturel n est la somme de deux carrés si et seulement si il existe deux entiers a et b tels que $n = a^2 + b^2$.

1. Étant donnés des entiers a, b, c et d, développer puis factoriser l'expression

$$E = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2.$$

2. En déduire que si deux entiers naturels m et n sont sommes de deux carrés, c'est-à-dire si il existe des entiers a, b, c, d tels que $m = a^2 + b^2$ et $n = c^2 + d^2$, alors le produit mn l'est également.

3. Montrer que 493 est somme de deux carrés.

4. Cette décomposition en somme de deux carrés est-elle unique ?

Exercice 4 (Une nouvelle identité remarquable).
Montrer que pour tous nombres réels a, b et c, on a l'identité suivante :

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a).$$

Exercice 5 (Factorisation d'un polynôme de degré 3).
On considère l'application polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x)=x^3+x^2-5x+3.$$

1. Calculer $P(1)$.

2. Trouver des réels a, b et c tels que $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ pour tout réel x puis factoriser $P(x)$ en produit de facteurs de degré 1.

3. Montrer que, si $x\neq 1$ et $x\neq -3$, on a l'identité :

$$\frac{2(x^2+1)}{x^3+x^2-5x+3}-\frac{2x+1}{(x+1)^2-4}=\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Exercice 6 (Théorème de Sophie Germain).
On rappelle qu'un entier naturel p est dit **premier** s'il admet exactement deux diviseurs entiers positifs, 1 et lui-même. (En particulier, 1 n'est pas premier puisqu'il n'admet qu'un seul diviseur : lui-même.)
L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème de Sophie Germain, dont l'énoncé est le suivant :

> Pour tout entier naturel a supérieur ou égal à 2, le nombre a^4+4 n'est pas premier.

1. Vérifier que cette propriété est vraie pour $a=2$, puis pour $a=3$.

2. Que dire de l'entier a^4+4 pour $a=1$?

3. En reconnaissant le début d'une identité remarquable, trouver une factorisation de a^4+4.

4. Conclure.

Exercice 7 (Toujours plus d'identités remarquables).

1. Rappeler la factorisation de $x^2 - a^2$.

2. Factoriser l'application polynôme $x^3 - a^3$ sous la forme $(x-a)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ où α, β et γ sont réels.

3. Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. Proposer une factorisation de $x^n - a^n$. La démontrer.

Indications

Indications sur l'Exercice 1

1.a. On remarquera que $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x^2 - 2^2)$.

Indications sur l'Exercice 3

3. On remarquera que $493 = 17 \times 29$.

Indications sur l'Exercice 5

3. On factorisera $(x+1)^2 - 2^2$ à l'aide d'une identité remarquable.

Indications sur l'Exercice 6

3. On pourra remarquer que $a^4 + 4 = (a^2)^2 + 2^2$

Corrections

Correction de l'Exercice 1

On rappelle que $f(x) = (2x+5)(2x-4) - 3x^2 + 12$.

1. Dans cette question, on résout l'équation $f(x) = 0$ en factorisant $f(x)$.

a.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x+5)(2x-4) - 3x^2 + 12 \\ &= (2x+5)(2x-4) - 3(x^2 - 2^2) \\ &= 2(2x+5)(x-2) - 3(x-2)(x+2) \\ &= (x-2)[2(2x+5) - 3(x+2)] \\ &= (x-2)(x+4) \end{aligned}$$

b. L'équation $f(x) = 0$ équivaut par la question précédente à $(x-2)(x+4) = 0$. Un produit s'annulant si et seulement si l'un des termes est nul, l'équation proposée a donc deux solutions : $x_1 = 2$ et $x_2 = -4$.

2. Dans cette question, on utilise une autre méthode pour résoudre l'équation $f(x) = 0$: en développant $f(x)$.

a.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x+5)(2x-4) - 3x^2 + 12 \\ &= 4x^2 - 8x + 10x - 20 - 3x^2 + 12 \\ &= x^2 + 2x - 8 \end{aligned}$$

b. Par la question précédente, $f(x) = x^2 + 2x - 8$ est un polynôme du second degré. Pour trouver les solutions de $f(x) = 0$, on peut calculer le discriminant de f :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-8) = 4 + 32 = 36 = 6^2.$$

L'équation $f(x) = 0$ a donc deux solutions : $x_1 = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$. On vérifie qu'on retrouve bien les mêmes solutions que par la méthode de la question 1.

$\square$

Correction de l'Exercice 2

D'après le théorème de Pythagore, on sait que si les conditions pour avoir un triangle sont réalisées, le triangle proposé est rectangle en A si et seulement si on a l'égalité :

$$(2x-1)^2 = (x+5)^2 + (x-2)^2.$$

Or, on a la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned} &(2x-1)^2 = (x+5)^2 + (x-2)^2 \\ \Leftrightarrow\ &4x^2 - 4x + 1 = x^2 + 10x + 25 + x^2 - 4x + 4 \\ \Leftrightarrow\ &2x^2 - 10x - 28 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 - 5x - 14 = 0. \end{aligned}$$

On note $P(x) = x^2 - 5x - 14$. $P(x)$ est un polynôme du second degré, dont le discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-14) = 25 + 56 = 81 = 9^2$. L'équation $P(x) = 0$ admet donc deux solutions : $x_1 = \frac{5+9}{2} = 7$ et $x_2 = \frac{5-9}{2} = -2$.
Pour $x = 7$, les quantités $(2x-1)$, $(x+5)$ et $(x-2)$ valent respectivement 13, 12 et 5.Comme $13 < 12 + 5$, pour cette valeur de x, on a bien un triangle rectangle.
Pour $x = -2$, ces quantités valent respectivement -5, 3 et -4. Ces quantités représentent les longueurs des côtés du triangle, et ne peuvent donc pas être négatives ! Ainsi, cette valeur de x ne conduit à aucune solution pour le problème proposé.
En conclusion, il y a une unique valeur de x pour laquelle le triangle proposé est rectangle en A : $x = 7$.

$\square$

Correction de l'Exercice 3

1. En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} E &= (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2 \\ &= a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 + a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2. \end{aligned}$$

Et l'on peut ensuite factoriser de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2). \end{aligned}$$

x

2. Considérons deux entiers n et m qui sont somme de deux carrés. On peut donc écrire $n = a^2 + b^2$ et $m = c^2 + d^2$. Avec la question précédente, on en déduit que

$$nm = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2.$$

Ainsi, le produit nm s'écrit aussi comme somme de deux carrés puisque $ad + bc$ et $ac - bd$ sont des entiers.

3. Comme indiqué, remarquons que $493 = 17 \times 29$. Écrivons ensuite que $17 = 16+1 = 4^2+1^2$ et que $29 = 25+4 = 5^2+2^2$. Alors par la question précédente, en remplaçant a, b, c et d par 4, 1, 5 et 2 respectivement, on obtient que $493 = (4\times 2+1\times 5)^2+(4\times 5-1\times 2)^2 = 13^2+18^2$, ce qui démontre que 493 est somme de deux carrés.

4. Cette décomposition comme somme de deux carrés n'est pas unique.
Remarquons que, si l'on change le signe de a, b, c ou d alors on ne change pas la valeur du produit $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$, mais, on change celle des deux carrés intervenant dans la somme. Prenons par exemple $a = -4, b = 1, c = 5$ et $d = 2$, au lieu de $a = 4, b = 1, c = 5$ et $d = 2$. On trouve ainsi $493 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2 = (-8 + 5)^2 + (-20 - 2)^2 = 3^2 + 22^2$.

$\square$

Correction de l'Exercice 4
En développant $(a-b)^3$, on a :

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-ba^2-2ab^2-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\cdot\end{aligned}$$

Ainsi en appliquant trois fois ce résultat :

$$\begin{aligned}&(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3\\ &= (a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)+(b^3-3b^2c+3bc^2-c^3)+(c^3-3c^2a+3ca^2-a^3)\\ &= 3(ab^2-ba^2+bc^2-cb^2+ca^2-ac^2)\\ &= 3(ab^2+bc^2+ca^2-ba^2-cb^2-ac^2).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}3(a-b)(b-c)(c-a) &= 3(a-b)(bc-ba-c^2+ac)\\ &= 3(abc-ba^2-ac^2+ca^2-cb^2+ab^2+bc^2-abc)\\ &= 3(ab^2+bc^2+ca^2-ba^2-cb^2-ac^2).\end{aligned}$$

On conclut que

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

Remarque : Une autre méthode pour résoudre cet exercice peut être d'utiliser l'égalité $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ qui sera démontrée dans l'exercice 7.

□

Correction de l'Exercice 5
Le polynôme P est défini par $P(x)=x^3+x^2-5x+3$

1. Une racine évidente de P est 1, car $P(1)=1^3+1^2-5\times 1+3=0$.

2. On en déduit que $P(x)$ s'écrit sous la forme $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$, où les valeurs de a, b et c restent encore à déterminer.
En développant, on a $(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. Ainsi, en identifiant les coefficients avec ceux de $P(x)$, on en déduit que $a=1$, $(b-a)=1$, $(c-b)=-5$ et $-c=3$, c'est-à-dire que $a=1$, $b=2$ et $c=-3$.
$P(x)$ peut donc s'écrire $P(x)=(x-1)(x^2+2x-3)$. Il reste à factoriser le polynôme du second degré x^2+2x-3 pour conclure. En calculant le discriminant ou par identité remarquable ($x^2+2x-3=(x+1)^2-4$) ou en remarquant que 1 est à nouveau racine évidente, on trouve que $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$.
En conclusion, $P(x)$ se factorise en $P(x)=(x-1)^2(x+3)$.

3. Remarquons que $(x+1)^2-4=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)\cdot$ En utilisant cette remarque et la question précédente,pour x différent de 1 et -3, on a la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned}\frac{2(x^2+1)}{x^3+x^2-5x+3}-\frac{2x+1}{(x+1)^2-4}&=\frac{2(x^2+1)}{(x-1)^2(x+3)}-\frac{2x+1}{(x+3)(x-1)}\\&=\frac{2(x^2+1)-(2x+1)(x-1)}{(x-1)^2(x+3)}\\&=\frac{x+3}{(x-1)^2(x+3)}\\&=\frac{1}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

□

Correction de l'Exercice 6

1. Pour $a=2$, on a $a^4+4=2^4+4=16+4=20=4\times 5$. Donc dans ce cas, a^4+4 n'est pas premier.
Pour $a=3$, on a $a^4+4=3^4+4=81+4=85$ qui est divisible par 5. Donc dans ce cas, a^4+4 n'est pas premier.

2. Pour $a=1$, on a $a^4+4=1^4+4=1+4=5$. Dans ce cas en revanche, a^4+4 est premier. Il faut donc bien remarquer que le théorème de Sophie Germain (que l'on va démontrer dans la suite de l'exercice) ne s'applique qu'aux entiers à partir de 2.

3. En utilisant les identités remarquables, on factorise a^4+4 de la manière suivante :

$$\begin{aligned}a^4+4&=(a^2)^2+4a^2+2^2-4a^2\\&=(a^2+2)^2-(2a)^2\\&=(a^2+2+2a)(a^2+2-2a)\\&=((a+1)^2+1)((a-1)^2+1)\end{aligned}$$

4. Pour tout entier a tel que $a\geqslant 2$, on veut montrer que la factorisation obtenue à la question précédente assure que a^4+4 n'est pas premier. On a évidemment que $((a+1)^2+1)>1$. D'autre part, comme $a\geqslant 2$, on a aussi $((a-1)^2+1)>1$.
Ainsi, la factorisation $a^4+4=((a+1)^2+1)((a-1)^2+1)$ fait apparaitre deux diviseurs de a^4+4 dont aucun n'est égal à 1. Ceci implique aussi qu'aucun des deux n'est égal à a^4+4, démontrant ainsi que a^4+4 n'est pas premier.

□

Correction de l'Exercice 7

1. On rappelle l'identité remarquable $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

2. Comme a est une racine de x^3-a^3, on peut écrire que

$$x^3-a^3=(x-a)(\alpha x^2+\beta x+\gamma),$$

où α, β et γ sont à déterminer. En développant et en identifiant les coefficients de chaque puissance de x, on obtient que $\alpha=1$, $\beta-a\alpha=0$, $\gamma-a\beta=0$ et $-a\gamma=-a^3$, ce qui donne $\alpha=1$, $\beta=a$ et $\gamma=a^2$. On en conclut que x^3-a^3 se factorise en

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2).$$

3. Avec les questions précédentes, on peut avoir l'idée de l'égalité suivante, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$x^n - a^n = (x-a)\underbrace{\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}\right)}_{n \text{ termes}} = (x-a)\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1-i}.$$

Remarque : la somme $x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}$ s'écrit $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1-i}$, ce qui se lit “somme des $a^i x^{n-1-i}$ pour i variant de 0 à $n-1$”. On peut la démontrer facilement, en développant le membre de droite. En effet, on obtient

$$\begin{aligned}
&(x-a)\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}\right)\\
&\quad = x^n + ax^{n-1} + \cdots + a^{n-1}x - ax^{n-1} - a^2x^{n-2} - \cdots - a^{n-1}x - a^n\\
&\quad = x^n + ax^{n-1} - ax^{n-1} + \cdots + a^{n-2}x^2 - a^{n-2}x^2 + a^{n-1}x - a^{n-1}x - a^n\\
&\quad = x^n - a^n.
\end{aligned}$$

ou avec les signes $\sum$:

$$\begin{aligned}
(x-a)\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1-i} &= \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} x^{n-1-i}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i} - \sum_{k=1}^{n} a^k x^{n-k} \text{en posant } k = i+1\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i} - \sum_{i=1}^{n} a^i x^{n-i}\\
&= x^n - a^n.
\end{aligned}$$

En effet, lors du développement, tous les termes différents de x^n et $-a^n$ apparaissent avec le signe $+$ dans la première somme et avec le signe $-$ dans la seconde, et donc s'annulent deux à deux. On dit que de telles sommes sont *téléscopiques.*

□

