Trigonométrie

E. Miot, M. Bouvel

Niveau : Première
Difficulté : ★ à ★★★
Durée : 1h30
Rubrique(s) : Analyse (Étude des fonctions circulaires), Géométrie (Trigonométrie)

La petite histoire...
C'est le problème récurrent et agaçant du gâteau au chocolat à partager de façon égale entre tous les invités. Outre le couteau, on ne dispose que d'une règle graduée et d'une équerre...

Exercice 1 (Partage équitable).
On souhaite découper un gâteau en parts égales entre n invités. On suppose que le gâteau a une forme circulaire, et qu'on en connaît le centre. Décrire une manière de partager le gâteau, en utilisant seulement une règle graduée et une équerre, lorsqu'il y a $n = 2, 4, 6, 8$ ou 12 invités.

Exercice 2 (Trigonométrie remarquable).
Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a les égalités suivantes :

1. $(\sin(x) + \cos x)^2 = 1 + 2\sin(x)\cos x$;

2. $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1$;

3. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$.

Exercice 3 (Valeurs numériques).
En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 (Factorisations).
Pour tout nombre réel x, calculer $\cos(3x)$ (respectivement $\sin(3x)$) en fonction de $\cos x$ (respectivement $\sin(x)$).

Exercice 5 (Linéarisation d'expressions trigonométriques).

1. Redémontrer l'égalité suivante : $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ pour tout nombre réel x.

2. Exprimer $\sin^2 x$, $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$ en fonction d'une somme de cosinus (sans produit ni puissance). Ce procédé est appelé **linéarisation** des puissances $\sin^2 x$, $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$.

3. Résoudre l'équation $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{5}{8}$.

Exercice 6 (Résolution d'une inéquation).
Trouver l'ensemble des nombres réels x qui vérifient l'inégalité

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1.$$

Exercice 7 (Manipulations de cosinus).

1. Soient a et b des nombres réels. Exprimer $\cos a \cos b$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.

2. Soient p et q des nombres réels. Grâce à un changement de variable, démontrer que

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

3. En déduire les solutions de l'équation $\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x) = 0$.

Exercice 8 (Et les tangentes dans tout ça ?).

1. Soient x et y des nombres réels tels que ni x, ni y, ni $x+y$ n'est égal à $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\tan(x+y)(1 - \tan x \tan y) = \tan x + \tan y.$$

2. Soit ABC un triangle non rectangle. On note a, b et c les angles $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$.

a. Montrer que $\tan(a+b) = -\tan c$.

b. À l'aide des deux questions précédentes, établir l'égalité :

$$\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \, \tan b \, \tan c.$$

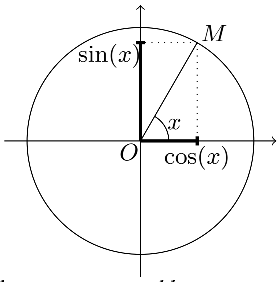
Avant de corriger, un formulaire ...

La trigo, ce n'est pas si compliqué. Le tout, c'est de bien connaître son cours. Cela permet de voir rapidement quelle formule pourra conduire au résultat. Rappelons donc l'essentiel de ce qu'il faut savoir en trigonométrie.

Cercle trigonométrique :

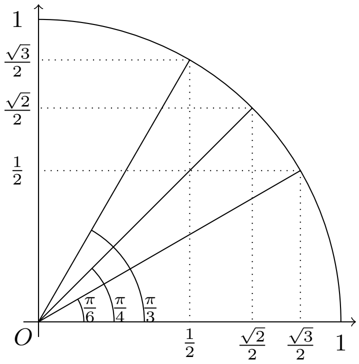
Le cosinus de x est l'abscisse du point M, situé sur le cercle trigonométrique tel que l'angle entre le vecteur définissant l'axe des abscisses et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ vaut x (en radian).

De même, l'ordonnée de M est $\sin(x)$.



Valeurs remarquables :

Quelques unes suffisent. Pour les retenir, le cercle trigonométrique peut être plus efficace qu'un tableau !



x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

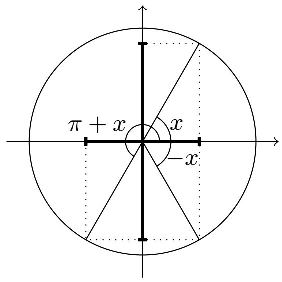
Somme des carrés :

La formule est tellement simple qu'on la retient aisément : pour tout x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Cependant, la démonstration est très facile, encore une fois en considérant le cercle trigonométrique : il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore !

Formules des angles associés : Encore une fois, ces formules "se voient bien" sur le cercle trigonométrique.

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x) & \cos(\pi+x) &= -\cos(x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x) & \sin(\pi+x) &= -\sin(x) \end{aligned}$$

Avec ces quatre formules, on peut retrouver aussi $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.



Formules d'addition : Il suffit d'en retenir deux :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \text{et} \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Les formules pour $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$ se retrouvent à partir de celles ci-dessus. Par exemple :

$$\begin{aligned} \cos(a-b) = \cos(a+(-b)) &= \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) \\ &= \cos a \cos b - \sin a(-\sin b) \\ &= \cos a \cos b + \sin a \sin b. \end{aligned}$$

Résolution d'équations :

Soit a un réel.

L'équation $\cos(x) = \cos a$ d'inconnue x a pour ensemble de solutions

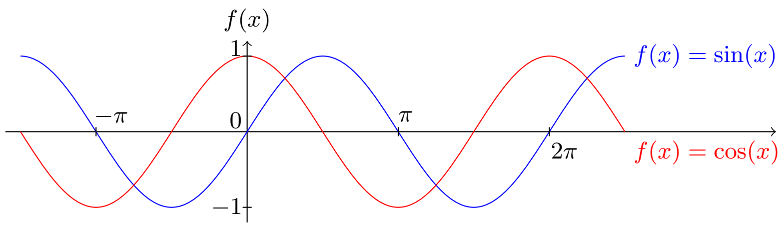
$$\{a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

L'équation $\sin(x) = \sin a$ d'inconnue x a pour ensemble de solutions

$$\{a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Courbes :

Enfin, il est bon d'avoir en tête les représentations graphiques des fonctions sin et cos.



Complexes et trigonométrie : Pour ceux qui ont déjà utilisé les nombres complexes, il est rappelé que pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$$

On en déduit la formule de Moivre : pour tout entier naturel n,

$$(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$$

Indications

Indications sur l'Exercice 4

Appliquer les formules de trigonométrie, en écrivant que
$\cos(3x) = \cos(2x + x)$, etc.

Indications sur l'Exercice 5

2. On pourra commencer par écrire $\cos^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$.

Indications sur l'Exercice 6

Montrer que l'inégalité est équivalente à $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

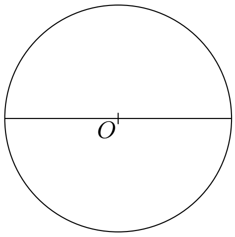
Indications sur l'Exercice 7

3. Pour la question 3) on pourra s'aider de la question 2) appliquée à $\cos(x) + \cos(3x)$.

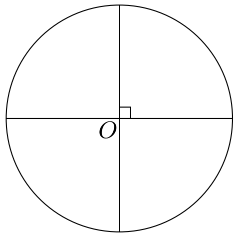
Corrections

Correction de l'Exercice 1

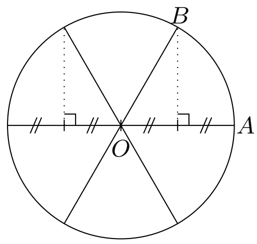
On note O le centre du gâteau. Toutes les constructions ci-dessous se justifient par le cercle trigonométrique.



Pour 2 invités

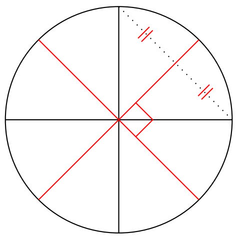


Pour 4 invités

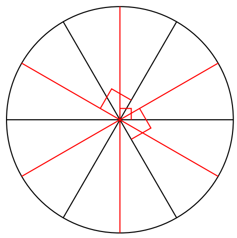


Pour 6 invités

Les constructions pour 8 et 12 invités commencent comme celles pour 4 et 6 respectivement. Puis on continue le découpage selon le tracé en rouge. (Mais il y d'autres façons d'obtenir ce découpage équitable.)



Pour 8 invités



Pour 12 invités

Remarque : si la règle n'est pas graduée, dans le cas de 6 invités, on obtient le point B comme intersection du cercle trigonométrique et du cercle de rayon 1 centré en A. Pour le cas de 8 ou 12 invités, on construit des bissectrices à l'aide uniquement du compas et d'une règle non graduée.

$\square$

Correction de l'Exercice 2

1. On développe le carré par identité remarquable, puis on utilise l'égalité $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$. On obtient :

$$(\sin(x) + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin(x)\cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin(x)\cos x.$$

2. On utilise l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ “à l'envers”, pour $a = \sin^2 x$ et $b = \cos^2 x$. Ainsi :

$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1^2 = 1.$$

3. Par identité remarquable et formule d'addition, on a :

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x).$$

□

Correction de l'Exercice 3
Tout d'abord, on vérifie que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$. Ainsi,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

et

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

□

Correction de l'Exercice 4
■ Première méthode sans utilisation des complexes :
Il est utile de calculer d'abord $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin(x)$. On sait que :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x + x)\\
&= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)\\
&= (\cos^2(x) - \sin^2(x))\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x)\\
&= \cos^3(x) - \sin^2(x)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x)\\
&= \cos^3(x) - 3\left(1 - \cos^2(x)\right)\cos(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \sin(2x + x)\\
&= \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x)\\
&= 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + \sin(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x))\\
&= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)\\
&= 3\sin(x)\left(1 - \sin^2(x)\right) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).
\end{aligned}$$

■ Seconde méthode avec utilisation des complexes :
Par la formule de Moivre développée par la formule du binôme de Newton, on a immédiatement :

$$\begin{aligned}
\cos(3x) + \mathrm{i}\sin(3x) &= (\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^3\\
&= \cos^3(x) + 3\mathrm{i}\cos^2(x)\sin(x) + 3\mathrm{i}^2\cos(x)\sin^2(x) + \mathrm{i}^3\sin^3(x)\\
&= \cos^3(x) + 3\mathrm{i}\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - \mathrm{i}\sin^3(x).
\end{aligned}$$

En égalant partie réelle et partie imaginaire, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)(1 - \cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)\\
\sin(3x) &= 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1 - \sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).
\end{aligned}$$

□

Correction de l'Exercice 5

1. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$.

2. La question précédente donne

$$\cos^2 x = \frac{\cos(2x) + 1}{2}. \tag{1}$$

Ainsi, comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{\cos(2x) + 1}{2} = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Cette expression permet d'obtenir, pour $\sin^4 x$:

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4}.$$

Pour faire disparaître la puissance carrée dans $\cos^2(2x)$, on utilise ensuite la formule (1) obtenue précédemment, en remplaçant x par $2x$, c'est-à-dire l'égalité $\cos^2(2x) = \dfrac{\cos(4x) + 1}{2}$. Ainsi,

$$\sin^4 x = \frac{1 - 2\cos(2x) + \frac{\cos(4x)+1}{2}}{4} = \frac{2 - 4\cos(2x) + \cos(4x) + 1}{8} = \frac{3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}.$$

Avec la question **3)** de l'exercice 2, on a rapidement le résultat pour $\cos^4 x$:

$$\cos^4 x = \sin^4 x + \cos(2x) = \frac{3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8} + \cos(2x) = \frac{3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}.$$

Remarque : on peut aussi élever (1) au carré et remplacer $\cos^2(2x)$ comme précédemment.

3. En sommant les linéarisations obtenues pour $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$, on trouve que $\cos^4 x + \sin^4 x = \dfrac{3 + \cos(4x)}{4}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{5}{8} &\Leftrightarrow \frac{3 + \cos(4x)}{4} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 6 + 2\cos(4x) = 5 \Leftrightarrow \cos(4x) = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow 4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 4x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

□

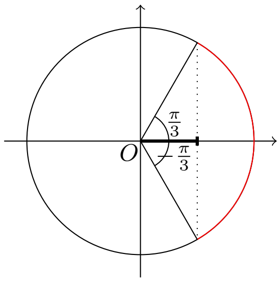
Correction de l'Exercice 6

On remarque d'abord que

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) &= 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right) = 2 \times \left(\cos\frac{\pi}{6}\cos(x) - \sin\frac{\pi}{6}\sin(x)\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) > 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) > \cos\frac{\pi}{3}.$$



Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$, l'inéquation $\cos(y) > \frac{1}{2}$ équivaut à $y \in]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}[$. Compte tenu de la périodicité du cosinus, $\cos(y) > \frac{1}{2}$ équivaut à $y = a + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $a \in]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}[$.

Ainsi l'inéquation proposée équivaut à $x + \frac{\pi}{6} = a + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $a \in]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}[$; le nombre $b = a - \frac{\pi}{6}$ décrit donc l'ensemble $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right[$. En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1$ est

$$\left\{b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, b \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right[\right\}.$$

□

Correction de l'Exercice 7

1. On rappelle que $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$, et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. En sommant, on obtient immédiatement $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$, c'est-à-dire

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}.$$

2. On résout le système $\begin{cases} a+b = p \\ a-b = q \end{cases}$ soit $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$.
L'égalité $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$ obtenue à la question précédente donne alors

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

3. Pour $p = 3x$ et $q = x$, la question précédente donne l'égalité

$$\cos(3x) + \cos(x) = 2\cos(2x)\cos(x).$$

Ainsi, $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(x) + \cos(2x) = \cos(2x)(2\cos(x) + 1)$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. On a donc :

$$\begin{aligned}
\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(2x)(2\cos(x)+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \text{ ou } 2\cos(x) + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

□

Correction de l'Exercice 8

1. On rappelle que $\tan a$ est défini seulement lorsque le réel a n'est pas égal à $\frac{\pi}{2} + k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Et pour un tel réel a, on a l'égalité $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$. Ainsi, avec les hypothèses de l'énoncé sur x et y, on a :

$$\begin{aligned}\tan(x+y)(1-\tan x\tan y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}\left(1-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\frac{\sin y}{\cos y}\right)\\ &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}\frac{\cos(x)\cos y-\sin(x)\sin y}{\cos(x)\cos y}\\ &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cos y} = \frac{\sin(x)\cos y+\sin y\cos(x)}{\cos(x)\cos y}\\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{\sin y}{\cos y} = \tan x+\tan y.\end{aligned}$$

2.a. La somme des angles d'un triangle étant égale à π, et le triangle ABC n'étant pas rectangle, on vérifie que a, b, c et $a+b$ sont tous différents de $\frac{\pi}{2}+k\pi$, pour $k\in\mathbb{Z}$. On en déduit aussi que $a+b+c=\pi$, c'est-à-dire $a+b=\pi-c$. On sait [1] que $\tan(\pi-x)=\tan(-x)=-\tan x$. Ainsi, $\tan(a+b)=\tan(\pi-c)=-\tan c$.

2.b. La question **1)** assure que $\tan x+\tan y=\tan(x+y)(1-\tan x\tan y)$. En appliquant cette formule pour $x=a$ et $y=b$, et en combinant avec la question **2.a)**, on obtient :

$$\begin{aligned}\tan a+\tan b+\tan c &= \tan(a+b)(1-\tan a\tan b)+\tan c\\ &= -\tan c(1-\tan a\tan b)+\tan c = \tan a\tan b\tan c.\end{aligned}$$

□

1. ou, si on ne le sait pas, on le redémontre à partir du formulaire...

