

CONVEXITÉ ET APPLICATIONS

cours rédigé par

ROZENN TEXIER-PICARD
picard@bretagne.ens-cachan.fr

Préparation à l'Agrégation

ENS Cachan Bretagne / Université Rennes 1

INTRODUCTION

Bien que la notion de convexité soit connue depuis l'Antiquité, c'est essentiellement au début du 20^{ème} siècle que, avec l'essor de l'analyse fonctionnelle, la convexité a trouvé de nouvelles applications en analyse.

Dans ce cours, on se limitera à des notions assez fondamentales, à l'interface entre géométrie, analyse fonctionnelle et analyse. De nombreux livres de géométrie énoncent les résultats de ce cours, le plus souvent en dimension finie. Lorsque c'est possible et intéressant, nous nous poserons la question de la généralisation à la dimension infinie, souvent à la base de théorèmes importants de l'analyse.

Les sections signalées par une astérisque, plus difficiles, peuvent permettre d'enrichir une leçon sur le sujet avec des applications de haut niveau.

Les résultats énoncés pourront notamment être utilisés dans les leçons suivantes :

- Fonctions monotones, fonctions convexes, exemples et applications,
- Parties convexes, fonctions convexes d'une ou plusieurs variables, applications
- Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

mais aussi, entre autres,

- Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications.
- Problèmes d'extremums.
- Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
- Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
- Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.
- Applications affines. Groupe affine.

Le dernier chapitre est en cours de rédaction. Par ailleurs, ces notes contiennent encore certainement quelques erreurs ou imprécisions. Le lecteur qui en trouvera est prié de les signaler à l'auteur par courrier électronique : picard@bretagne.ens-cachan.fr

Bibliographie

- [1] Dominique Azé, *Eléments d'analyse convexe et variationnelle*
- [2] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, Claude Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*, Springer-Verlag, 1996
- [3] Claude Zuilu, Hervé Queffélec, *analyse pour l'agrégation.*
- [4] Haïm Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*
- [5] Patrice Tauvel, *Géométrie*
- [6] Marcel Berger, *Géométrie, tome 2*
- [7] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe, Exercices corrigés*
- [8] Grégoire Allaire, *Analyse numérique et optimisation*

Table des matières

1	Parties convexes d'un espace affine	7
1.1	Définition et le théorème fondamental	7
1.1.1	Définition	7
1.1.2	Théorème fondamental de la géométrie affine*	8
1.2	Enveloppe convexe	11
1.2.1	Définitions	11
1.2.2	Le théorème de Carathéodory	12
1.2.3	Vrai ou faux ?	14
1.3	Jauge d'un convexe	15
1.4	Projection sur un convexe fermé, applications	18
1.4.1	Dimension finie, norme euclidienne	18
1.4.2	le cas de la dimension infinie*	19
1.4.3	Application 1 : théorèmes de point fixe*	21
1.4.4	Application 2 : le théorème de Stampacchia*	25
1.5	Hahn-Banach et théorèmes de séparation	28
1.5.1	Les théorèmes de séparation classiques	28
1.5.2	Preuve dans le cas hilbertien	29
1.5.3	Preuve dans le cas d'un evn*	29
1.5.4	Autres résultats*	31
1.5.5	Des applications*	33
1.6	Points extrémaux et hyperplans d'appui	36
1.6.1	Hyperplans d'appui	36
1.6.2	Points extrémaux	36
1.6.3	Exemples et Applications	38
1.6.4	Vrai ou faux ?	39
2	Fonctions convexes	41
2.1	Définitions, premières propriétés	41
2.1.1	Convexité	41
2.1.2	Premiers exemples	43

2.1.3	Caractérisations et propriétés	44
2.2	Caractérisations dans le cas différentiable	46
2.2.1	Encore une caractérisation géométrique	47
2.2.2	Fonctions monotones	48
2.2.3	Encore des exemples	50
2.3	Quelques résultats importants sur les fonctions convexes	54
2.3.1	Inégalités de convexité	54
2.3.2	Inégalité de Jensen	55
2.3.3	Continuité des fonctions convexes	56
2.3.4	Dérivabilité	60
2.4	Problèmes d'extrema	61
2.4.1	Existence du minimum, sans hypothèse de convexité	62
2.4.2	Existence du minimum - Cas convexe	63
2.4.3	Applications	65
2.4.4	Caractérisation du minimum - Cas "sans contrainte"	67
2.4.5	Minimisation sous contraintes d'inégalité/égalité	69
2.4.6	Condition d'optimalité - cas de contraintes convexes	72

Chapitre 1

Parties convexes d'un espace affine

Dans toute cette partie, E sera un espace vectoriel, de dimension finie ou infinie (éventuellement un espace affine). On pourra, lorsque c'est nécessaire, munir E d'une topologie (métrique pour simplifier), et on supposera qu'elle est compatible avec la structure d'espace vectoriel (i.e. l'addition et la multiplication par un scalaire sont continues).

1.1 Définition et le théorème fondamental

1.1.1 Définition

Définition 1.1.1 – $C \subset E$ est convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall \alpha \in]0, 1[, \alpha x + (1 - \alpha)y \in C.$$

Exemples (faciles) :

- sous-espace affine ;
- simplexe de \mathbb{R}^k : $\Delta_k = \{\alpha \in (\mathbb{R}^+)^k, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$;
- Les convexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

Remarque 1.1.1 – une intersection quelconque de convexes est convexe ;

– la somme de Minkowski de deux convexes A et B , définie par

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\},$$

est convexe ;

– le produit cartésien de deux convexes est convexe.

1.1.2 Théorème fondamental de la géométrie affine*

Théorème 1.1.1 (*Théorème fondamental de la géométrie affine*)

Soit E un espace affine de dimension $n \geq 2$. Alors

1. toute bijection de E dans E qui envoie un convexe sur un convexe est une bijection affine ;
2. toute bijection qui envoie trois points alignés sur trois points alignés est affine.

Remarque 1.1.2 – *Ce résultat est clairement faux en dimension 1, puisque toute application continue envoie un convexe sur un convexe.*

Preuve. – (voir par exemple, Berger t.1 p. 77 ou Bourbaki, Espaces Vectoriels Topologiques, exercice 6 p. 183 et Algèbre, exercice 7 p. 201.)

On utilisera dans cette preuve le résultat suivant, admis : le seul automorphisme de corps de \mathbb{R} est l'identité. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

1. Remarquons d'abord que la 2ème affirmation implique la première.

Soit f une bijection vérifiant les hypothèses du point 1, et $g = f^{-1}$. Vérifions que g envoie trois points alignés sur trois points alignés. Il suffit de montrer que

$$\forall x, y, z \in E, \text{ tels que } z \in [x, y], g(z) \in [g(x), g(y)],$$

Le segment $[g(x), g(y)]$ est convexe, donc son image $f([g(x), g(y)])$ l'est. Or cette image contient $x = f(g(x))$ et $y = f(g(y))$ donc elle contient le segment $[x, y]$. En particulier, elle contient $z = f(g(z))$. Il en découle que $g(z) \in [g(x), g(y)]$ et donc (en admettant provisoirement le résultat 2.) que g est affine. Ainsi f est affine.

Montrons maintenant l'affirmation 2. Soit donc g une bijection qui envoie trois points alignés sur trois points alignés. On procède par étapes et on montre les lemmes suivants.

2. **Lemme 1.1.2** – *Si F est un sous-espace affine de E , alors $g^{-1}(F)$ est un sous-espace affine.*

Soit F un sous-espace affine, et $G = g^{-1}(F)$. Pour montrer que G est un sous-espace affine, il suffit de montrer qu'il est non-vidé (ok puisque g est bijective) et que,

$$\forall x, y \in G, \quad (x, y) \subset G.$$

Soient donc $x, y \in G$, $z \in (x, y)$, alors par hypothèse $g(x), g(y), g(z)$ sont alignés, donc $g(z) \in (g(x), g(y))$. Or F est un sea et $g(x), g(y) \in F$ donc $(g(x), g(y)) \subset F$. D'où $g(z) \in F$ et donc $z \in G$. □

3. **Lemme 1.1.3** – Si x_0, \dots, x_k sont affinement indépendants, alors $g(x_0), \dots, g(x_k)$ le sont aussi.

On complète (x_0, \dots, x_k) en un repère affine de $E : (x_0, \dots, x_n)$. On va montrer que $(g(x_0), \dots, g(x_n))$ est un repère affine de E . L'indépendance affine des points en découlera. Le cardinal de la famille étant égal à la dimension de l'espace $+1$, il suffit de montrer que la famille $(g(x_0), \dots, g(x_n))$ engendre E .

Soit donc F le sous-espace affine engendré par $(g(x_0), \dots, g(x_n))$. D'après le lemme ci-dessus, $g^{-1}(F)$ est un sous-espace affine. De plus, il contient tous les $x_i, 0 \leq i \leq n$, donc il est égal à E . D'où $F = E$ (g bijective). \square

4. **Lemme 1.1.4** – Si D est une droite, alors $g(D)$ est une droite.

On sait déjà (par hypothèse) que $g(D)$ est inclus dans une droite, que nous nommerons D' . Soit maintenant $y = g(x) \in D'$. Supposons $x \notin D$. Considérons deux points distincts $a, b \in D$, alors leurs images $g(a), g(b)$ sont sur D' . On a donc a, b, x affinement indépendants, et $g(a), g(b), g(x)$ alignés. Ceci contredit le lemme 1.1.3. Donc $x \in D$, et $D' = g(D)$. \square

De la même façon, on montre que si P est un plan de E , alors $g(P)$ est un plan.

5. **Lemme 1.1.5** – Si D et D' sont deux droites parallèles, alors $g(D)$ et $g(D')$ sont deux droites parallèles.

Si $D = D'$, OK. Sinon, $D \cap D' = \emptyset$. Soit P le plan contenant ces deux droites, alors $g(P)$ est un plan (cf ci-dessus), qui contient $g(D)$ et $g(D')$. Ainsi, $g(D)$ et $g(D')$ sont coplanaires et disjointes (car g bijective) donc parallèles. \square

6. Preuve du théorème :

Il reste à montrer que g est affine, i.e. pour $O \in E$, $O' = g(O)$, l'application définie sur l'espace vectoriel associé \vec{E} par

$$\vec{g}(\vec{x}) = g(O + \vec{x}) - O'$$

est linéaire. Il faut donc montrer les deux propriétés suivantes :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}, \quad \vec{g}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{g}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{y}) \quad (1.1)$$

$$\forall \vec{x} \in \vec{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{g}(\lambda \vec{x}) = \lambda \vec{g}(\vec{x}). \quad (1.2)$$

Pour alléger l'écriture, on omet ci-dessous les flèches.

Montrons d'abord (1.2). On a clairement $g(0) = 0$, donc la propriété est vraie pour $x = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons maintenant $x \neq 0$. Les points 0 , x et λx étant alignés, et g conservant l'alignement, il existe une fonction $\sigma_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, g(\lambda x) = \sigma_x(\lambda)g(x)$. On va montrer que σ_x est un automorphisme de corps.

- Il est clair que $\sigma_x(1) = 1$.
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, montrons que $\sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$, soit $g((\lambda + \mu)x) = g(\lambda x) + g(\mu x)$. La dimension étant supérieure ou égale à 2, il existe $y \notin (0x)$. Le dessin ci-dessous permet de se convaincre de l'égalité cherchée.

- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, montrons que $\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)$, soit $g((\lambda\mu)x) = \sigma_x(\lambda)g(\mu x)$. La dimension étant supérieure ou égale à 2, il existe $y \notin (0x)$. Le dessin ci-dessous permet de se convaincre de l'égalité cherchée.

On admet que l'identité est le seul automorphisme de corps sur \mathbb{R} . Donc $\sigma_x = id$ et on a montré (1.2).

Montrons maintenant (1.1). Si x et y sont liés, le résultat est vrai d'après (1.2). Si par contre x, y linéairement indépendants, alors $0, x, x + y, y$ sont les sommets d'un parallélogramme. L'application g préserve le parallélisme, donc $0, g(x), g(x + y), g(y)$ sont les sommets d'un parallélogramme. D'où $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

Ainsi \vec{g} est linéaire et donc g est affine. □

1.2 Enveloppe convexe

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1 – Soit $S \subset E$, E espace vectoriel normé; alors

- l'enveloppe convexe de S est l'intersection de tous les convexes contenant S . On la notera $co(S)$.
- l'enveloppe convexe fermée de S est l'intersection de tous les convexes fermés contenant S . On la notera $\bar{co}(S)$.

Vrai ou faux? L'enveloppe convexe fermée de S est l'adhérence de l'enveloppe convexe de S .

C'est vrai. La preuve est élémentaire, et repose uniquement sur la définition et la propriété que la fermeture d'un convexe est encore convexe (pour s'en convaincre, raisonner avec des suites et faire un dessin).

Exercice 1.2.1 – Montrer que

$$co(S) = \left\{ x \in E, \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha \in \Delta_k, \exists (x_1, \dots, x_k) \in S^k, x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \right\}.$$

Schéma de la preuve : On note, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$C_k = \left\{ x \in E, \exists \alpha \in \Delta_k, \exists (x_1, \dots, x_k) \in S^k, x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \right\}, \quad C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} C_k.$$

Pour montrer que $co(S) = C$, on montre les étapes suivantes.

- C est convexe (facile),
- $S \subset C$ (facile, car $S = C_1$),
- pour tout convexe K contenant S , K contient C (par exemple, on montre par récurrence sur k que K contient tous les C_k).

C est donc bien le plus petit convexe contenant S .

Cet exercice montre donc que les points de l'enveloppe convexe de S sont exactement les combinaisons convexes d'un nombre arbitraire (mais fini) de points de S . On verra qu'en dimension finie n , on peut se contenter de $n + 1$ points, voir théorème 1.2.1.

Exercice 1.2.2 – $S \subset \mathbb{R}^n$, borné. Alors $\bar{co}(S) = co(\bar{S})$.

Attention! Ce résultat est faux si S est non borné. En particulier, l'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas toujours fermée! Contre-exemple : $S = \{(0, 0)\} \cup (\mathbb{R} \times 1)$.

1.2.2 Le théorème de Carathéodory

Théorème 1.2.1 (Carathéodory) – Soit $S \subset \mathbb{R}^n$, alors tout point de $co(S)$ est combinaison convexe de $n + 1$ éléments de S , i.e :

$$co(S) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha \in \Delta_{n+1}, \exists (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^{n+1}, x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \right\}.$$

Preuve. – L'inclusion \supset découle de l'exercice 2.1, donc seule l'inclusion \subset est à montrer. Soit $x \in coS$, alors

$$\exists k \geq 1, x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i.$$

Si $k \leq n + 1$, rien à démontrer. Supposons donc $k > n + 1$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$.

Alors les points x_1, \dots, x_k sont affinement dépendants, c'est-à-dire que les vecteurs

$$x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$$

sont linéairement dépendants. Donc il existe $\lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=2}^k \lambda_i (x_i - x_1) = 0.$$

En notant $\lambda_1 = -\sum_{i=2}^k \lambda_i$, il vient

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0.$$

Nécessairement l'un au moins des λ_i est strictement positif. Notons alors

$$t = \min \left\{ \frac{\alpha_i}{\lambda_i}, i = 1, \dots, k, \lambda_i > 0 \right\}.$$

Posons $\alpha'_i = \alpha_i - t\lambda_i$. Alors on a bien,

$$\begin{cases} \text{pour tout } i, \alpha'_i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^k \alpha'_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \\ \exists i, \alpha'_i = 0, \\ x = \sum_{i=1}^k \alpha'_i x_i. \end{cases}$$

Donc x est combinaison convexe de $k - 1$ éléments de S . On peut réitérer ce procédé tant que $k > n + 1$. \square

Application : Ce théorème fournit un algorithme de construction de l'enveloppe convexe (en dimension finie) : Notons $S_1 = \cup_{x,y \in S} [x, y]$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_{k+1} = \cup_{x,y \in S_k} [x, y]$. Alors l'algorithme est fini : $S_n = co(S)$.

Corollaire 1.2.2 – Soit S un compact de \mathbb{R}^n , alors son enveloppe convexe est compacte.

Preuve. – Soit φ l'application définie par

$$\varphi : \begin{array}{l} \Delta_{n+1} \times S^{n+1} \quad \rightarrow \quad co(S) \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) \quad \mapsto \quad \sum \alpha_i x_i \end{array}$$

Elle est continue et surjective sur un compact, d'où le résultat. \square

Remarque 1.2.1 – En dimension infinie, l'enveloppe convexe d'un compact n'est pas nécessairement fermée !

Prenons pour contre-exemple un Hilbert H , muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit K le compact défini par

$$K = \left\{ \frac{e_n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.$$

Notons

$$v_n = \frac{6}{\pi^2} \left[\sum_{i=0}^n \frac{e_i}{(i+1)^3} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2} e_0 \right] \in coK.$$

La limite de cette suite existe et vaut

$$v = \frac{6}{\pi^2} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e_i}{(i+1)^3} \right].$$

Ce vecteur v ne peut pas s'écrire comme combinaison convexe (finie) des éléments de K , donc $v \notin coK$.

1.2.3 Vrai ou faux ?

1. C est convexe si et seulement si $\forall x, y \in C, (x + y)/2 \in C$.

FAUX. Contre-exemple : \mathbb{Q} n'est pas convexe. Par contre, le résultat est vrai si on suppose que C est fermé (par densité des rationnels dyadiques dans $[0, 1]$).

2. E espace métrique; si C est convexe, alors son intérieur et son adhérence sont convexes.

VRAI. Les démonstrations ne posent pas de difficulté majeure (s'appuyer sur un dessin).

3. Pour tout $S \subset \mathbb{R}^n$, un point $x \in co(S)$ est toujours combinaison convexe de deux éléments de S .

VRAI pour $n = 1$ (c'est Carathéodory). FAUX pour $n \geq 2$. Contre-exemple : S formé de trois points non alignés. L'enveloppe convexe est le triangle (bord + intérieur), alors que les combinaisons convexes de 2 éléments de S donnent seulement les côtés du triangle.

4. $S \subset \mathbb{R}^n$. Alors $\bar{co}S = co(\bar{S})$.

FAUX. Contre-exemple : $S = \{(0, 0)\} \cup (\mathbb{R} \times 1)$.

VRAI si on ajoute l'hypothèse : S borné. Alors on peut utiliser le corollaire du théorème de Minkowski, qui montre que $co(\bar{S})$ est compact donc fermé.

5. $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant. Alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P .

VRAI (c'est le théorème de Gauss-Lucas).

Preuve. – On note $P(X) = \prod_{i=1}^d (X - \zeta_i)^{m_i}$. Alors

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^d \frac{m_i}{X - \zeta_i}.$$

Soit z une racine de P' , on veut vérifier qu'elle est dans l'enveloppe convexe des ζ_i , $1 \leq i \leq d$. Si $P(z) = 0$ rien à démontrer. Sinon, on peut écrire :

$$0 = \sum_{i=1}^d \frac{m_i}{z - \zeta_i} = \sum_{i=1}^d \frac{m_i(\bar{z} - \bar{\zeta}_i)}{|z - \zeta_i|^2}.$$

Par passage au conjugué, on obtient,

$$0 = \sum_{i=1}^d t_i(z - \zeta_i), \quad t_i = \frac{m_i}{|z - \zeta_i|^2} \geq 0.$$

Notons T la somme des t_i ; on obtient ainsi $z = \sum_{i=1}^d t_i/T \zeta_i$. □

6. *Tout convexe fermé borné est homéomorphe à la boule unité fermée.*

FAUX car il existe des convexes fermés d'intérieur vide (ex : un segment dans \mathbb{R}^2). Par contre, on a : si C convexe borné d'intérieur non vide, B boule ouverte, alors il existe un homéomorphisme φ tel que

$$\varphi(\text{int}C) = B, \quad \varphi(\bar{C}) = \bar{B}, \quad \varphi(\partial C) = \partial B.$$

On le construit à partir de la jauge de C , voir section suivante.

1.3 Jauge d'un convexe

Soit C un convexe tel que 0 est dans l'intérieur de C . On appelle jauge de C l'application $\rho_C : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\rho_C(x) = \inf \left\{ \alpha > 0, \frac{x}{\alpha} \in C. \right\}$$

Exemples :

- pour $C = E$, la jauge ρ_E est identiquement nulle;
- pour C borné, on montre aisément que $\rho_C(x) = 0 \iff x = 0$.

Proposition 1.3.1 – ρ_C vérifie les propriétés suivantes :

1. ρ_C est positivement homogène : $\forall x \in E, \forall \lambda \geq 0, \rho_C(\lambda x) = \lambda \rho_C(x)$;
2. $\{x \in E, \rho_C(x) = 1\} = \partial C$, $\{x \in E, \rho_C(x) < 1\} = \text{int}C$;
3. ρ_C est sous-additive : $\forall x, y \in E, \rho_C(x + y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y)$;
4. ρ_C est continue ;

Preuve. – (voir par exemple, Brézis, Analyse Fonctionnelle)

1. La propriété 1 est immédiate d'après la définition.

2. Il est clair que si $x \in C$, alors $\rho_C(x) \leq 1$.

Montrons maintenant que $\{x \in E, \rho_C(x) < 1\} \subset C$. Soit x tel que $\rho_C(x) < 1$. Alors $\exists \alpha \in]0, 1[$ tel que $\frac{x}{\alpha} \in C$. On a aussi $0 \in C$ et par convexité on en déduit que $x \in C$.

Avant de finir la démonstration de la propriété 2, étudions les propriétés 3 et 4.

3. Montrons la sous-additivité. Soient $\epsilon > 0$, $x, y \in C$, on note

$$\bar{x} = \frac{x}{\rho_C(x) + \epsilon}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\rho_C(y) + \epsilon}.$$

On a : $\rho_C(\bar{x}) < 1$, $\rho_C(\bar{y}) < 1$ donc \bar{x} et \bar{y} sont dans C (d'après ce que nous venons de montrer au point 2). Posons

$$\alpha = \frac{\rho_C(x) + \epsilon}{\rho_C(x) + \rho_C(y) + 2\epsilon}, \quad \bar{z} = \alpha\bar{x} + (1 - \alpha)\bar{y}.$$

On a donc $\bar{z} \in C$, donc $\rho_C(\bar{z}) \leq 1$. Par ailleurs, on obtient après calcul :

$$\bar{z} = \frac{x + y}{\rho_C(x) + \rho_C(y) + 2\epsilon}.$$

Il vient : $\rho_C(x + y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y) + 2\epsilon$. En faisant tendre ϵ vers 0 on obtient le résultat voulu.

4. Montrons la continuité de ρ_C . Elle repose sur le fait que 0 est intérieur à C . Plus précisément, soit $r > 0$ tel que la boule $B(0, r)$ soit incluse dans C . On a alors :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \frac{y}{\|y\|}r \in C,$$

d'où on déduit aisément que

$$\rho_C(y) \leq \frac{\|y\|}{r}.$$

De plus, on a, en utilisant la sous-additivité :

$$\rho_C(x + y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y), \quad \rho_C(x) \leq \rho_C(x + y) + \rho_C(-y),$$

de sorte que

$$|\rho_C(x + y) - \rho_C(x)| \leq \max(\rho_C(y), \rho_C(-y)) \leq \frac{1}{r}\|y\|.$$

D'où la continuité (et même le caractère lipschitzien) de la jauge.

Nous pouvons maintenant terminer la preuve de la propriété 2. Nous avons déjà montré que

$$\{x \in E, \rho_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in E, \rho_C(x) \leq 1\}.$$

En prenant les intérieurs de chaque partie, et en utilisant la continuité de la jauge, nous obtenons

$$\{x \in E, \rho_C(x) < 1\} = \text{int } C;$$

En procédant de même avec les adhérences, nous obtenons

$$\{x \in E, \rho_C(x) \leq 1\} = \bar{C}.$$

En considérant $\partial C = \bar{C} \setminus \text{int } C$, nous obtenons le résultat énoncé.

Corollaire 1.3.2 – Soit C un convexe borné d'intérieur non vide d'un evn E . Alors il existe un homéomorphisme $f : E \rightarrow E$ qui envoie $\text{int } C$ sur la boule ouverte $B(0, 1)$, et ∂C sur la sphère $\partial B(0, 1)$.

Preuve. – On définit $f : E \rightarrow E$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ \rho_C(x) \frac{x}{\|x\|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

f est clairement continue en tout $x \neq 0$. La continuité en 0 découle de la remarque

$$\rho_C(x) \leq \frac{1}{r} \|x\|.$$

Par ailleurs, f est bijective, d'inverse

$$f^{-1} : x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ \frac{\|x\|}{\rho_C(x)} x & \text{sinon.} \end{cases}$$

La continuité de f^{-1} en dehors de 0 ne pose pas de problème. La continuité en 0 découle de la remarque

$$\rho_C(x) \geq \frac{1}{\delta} \|x\|,$$

où δ est le rayon d'une boule centrée en 0 et contenant C . f est donc bien un homéomorphisme. La propriété 2 de la proposition 1.3 montre qu'il envoie $\text{int}C$ sur la boule ouverte, et ∂C sur la sphère. \square

1.4 Projection sur un convexe fermé, applications

1.4.1 Dimension finie, norme euclidienne

Théorème 1.4.1 – Soient C un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^N , et $x \in \mathbb{R}^N$, alors :

1. il existe un unique $y \in C$ tel que $|y - x| = \inf_{z \in C} |z - x|$. y s'appelle projeté de x sur C et est noté $y = p_C(x)$.
2. y est caractérisé par la propriété :

$$\forall z \in C, \langle x - y, z - y \rangle \leq 0.$$

Preuve. –

1. L'existence vient du fait que C est fermé, et que la dimension est finie : on se ramène à un compact en considérant l'intersection de C avec une boule $\bar{B}(x, |x - y|)$, où y est un point quelconque de C . Sur ce compact, la fonction $y \mapsto |y - x|$ est continue donc minorée et atteint son min. Autre présentation : de toute suite minimisante on peut extraire une suite convergente, sa limite est un projeté. L'unicité provient de la convexité de C et du théorème de Pythagore (importance de la norme euclidienne) : si deux projetés différents y_1 et y_2 existent, alors le milieu m de $[y_1 y_2]$ est dans C ; le triangle $xy_1 y_2$ étant isocèle en x , on a $|mx| < |xy_1|$ ce qui contredit la définition du projeté.
2. Caractérisation. \Rightarrow : Soit $z \in C$, on pose $z_\alpha = y + \alpha(z - y)$, pour $\alpha \in]0, 1[$. Alors $z_\alpha \in C$. Par définition de y on a :

$$|z_\alpha - x|^2 = \alpha^2 |z - y|^2 + 2\alpha \langle z - y, y - x \rangle + |y - x|^2 \geq |y - x|^2.$$

En divisant par $\alpha > 0$ et en faisant tendre α vers 0 on obtient l'inégalité cherchée.

\Leftarrow : Soient y vérifiant la caractérisation et $z \in C$. On a :

$$\begin{aligned} 0 \geq \langle x - y, z - y \rangle &= \langle x - y, z - x + x - y \rangle \\ &= |x - y|^2 + \langle x - y, z - x \rangle \\ &\geq |x - y|^2 - |x - y| |z - x| \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \end{aligned}$$

d'où $|z - x| \geq |y - x|$.

□

Remarque 1.4.1 – Ce résultat est faux si la norme n'est pas euclidienne (on perd l'unicité) : prenons par exemple \mathbb{R}^2 muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Alors le point $(0, 1)$ a une infinité de projetés sur la droite d'équation $y = 0$.

Remarque : le théorème de Mouton énonce une "réciproque" de ce résultat.

Théorème 1.4.2 – Soit A un fermé non vide de \mathbb{R}^N . Si $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists ! y \in A, d(x, A) = |x - y|$, alors A est convexe.

Preuve. – voir par exemple Tauvel. (Ce n'est pas très difficile mais c'est un peu long pour faire un développement d'agreg.)

Voici une idée de la preuve sur un dessin :

si A non convexe, on peut trouver $x, y \in A, z \in]x, y[$ et $\epsilon > 0$ tel que $B(z, \epsilon) \cap A = \emptyset$. On considère toutes les boules fermées contenant $B(z, \epsilon)$ et dont l'intérieur ne rencontre pas A , et on montre qu'il existe parmi elles une boule de rayon maximal. Par unicité du projeté, elle rencontre A en un seul point. Mais alors, en la décalant un peu on peut obtenir une boule disjointe de A et de même rayon, ce qui contredit la maximalité. \square

Proposition 1.4.3 – Continuité de la projection. On a la propriété :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, |p_C(x_1) - p_C(x_2)|^2 \leq |p_C(x_1) - p_C(x_2)| |x_1 - x_2|.$$

Preuve. – Il suffit d'utiliser la caractérisation du théorème 1.4.1 :

$$\begin{aligned} \langle x_2 - p_C(x_2), p_C(x_1) - p_C(x_2) \rangle &\leq 0, \\ \langle x_1 - p_C(x_1), p_C(x_2) - p_C(x_1) \rangle &\leq 0. \end{aligned}$$

En sommant et en appliquant Cauchy-Schwarz, on aboutit au résultat recherché. \square

1.4.2 le cas de la dimension infinie*

Attention!

1. Dans un espace de Hilbert, on garde l'existence et l'unicité du projeté, et la caractérisation énoncée dans la proposition 1.4.1. La démonstration reste valable, sauf pour l'existence (voir Brézis). Soit $(y_n) \in C^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante; en fait, on peut montrer que cette suite est de Cauchy. Pour cela, écrivons l'identité du parallélogramme :

$$\left| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right|^2 + \left| \frac{y_n - y_m}{2} \right|^2 = \frac{1}{2} (|x - y_m|^2 + |x - y_n|^2).$$

Notons $d_n = |x - y_n|$, $d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$. On a :

$$\frac{y_n + y_m}{2} \in C \text{ donc } \left| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right| \geq d.$$

On en déduit :

$$\left| \frac{y_n - y_m}{2} \right|^2 \leq \frac{1}{2} (d_m^2 + d_n^2) - d^2.$$

Le second membre tend vers 0 quand n, m tendent vers $+\infty$. Ainsi, la suite (y_n) est de Cauchy, et donc converge vers y , qui vérifie bien $d = |x - y|$. Le reste de la preuve est identique au cas de la dimension finie.

2. Dans un espace de Banach réflexif, on garde l'existence (les boules sont compactes pour la topologie faible-étoile) mais on perd l'unicité (cf contre-exemple de la remarque 3.1).
3. Dans un espace de Banach quelconque, on n'a pas nécessairement existence d'un projeté. Un contre-exemple est proposé dans l'exercice ci-dessous.

Exercice 1.4.1 On considère $E = \{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$. E est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. Considérons le sous-espace $C = \{f \in E, \int_0^1 f = 0\}$. L'intégration de 0 à 1 étant une opération continue pour la norme considérée, C est un hyperplan fermé, donc un convexe fermé non vide de E . Montrer que la fonction $f_0 = id_{[0,1]}$ n'a pas de projeté sur C !

On montre dans un premier temps que

$$\forall f \in C, \|f - f_0\| > \frac{1}{2}.$$

Ensuite, on construit comme sur le dessin une suite de fonctions f_n affines par morceaux continues, telles que

$$\|f_n - f_0\| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}.$$

Il est à noter que ce théorème de projection 1.4.1 est souvent absent dans les livres de géométrie... Il a pourtant de très nombreuses applications en analyse; nous citons ici deux exemples : un théorème de point fixe, et le théorème de Stampacchia. D'autres applications existent, par exemple en analyse numérique (algorithme d'Uzawa, etc.)

1.4.3 Application 1 : théorèmes de point fixe*

On admet le théorème de point fixe de Brouwer, démontré en 1910 (Luitzen Egbertus Jan Brouwer, mathématicien néerlandais, 1881-1966) :

Théorème 1.4.4 – *Soit B la boule unité fermée de \mathbb{R}^N . Alors toute application continue $f : B \rightarrow B$ a un point fixe.*

De nombreuses preuves de ce théorème existent dans la littérature...

A partir de ce résultat, on souhaite démontrer le théorème de Schauder (1930) :

Théorème 1.4.5 – *Soit C un convexe compact non vide d'un espace vectoriel normé E . Alors toute application continue $f : C \rightarrow C$ a un point fixe.*

Remarque : en dimension infinie, un compact est nécessairement d'intérieur vide ; sinon, il contiendrait une boule, et les boules ne sont pas compactes... Plus précisément, un convexe compact engendre nécessairement un sous-espace affine qui est de dimension finie. Ainsi, le théorème ci-dessus est en réalité un résultat de dimension finie.

Par contre, on peut montrer le résultat suivant, qui est plus puissant et a effectivement des applications en dimension infinie :

Théorème 1.4.6 – *Soit C un convexe fermé non vide d'un espace vectoriel normé E . Alors toute application continue $f : C \rightarrow C$, d'image relativement compacte, a un point fixe.*

Preuve. – (voir Chambert-Loir, Fermigier, Maillot, analyse t.1)

La preuve consiste en deux étapes : on commence par le cas où E est de dimension finie, puis, dans le cas général : on se ramène à la dimension finie par compacité.

1. Commençons par le cas où E est de dimension finie. $\overline{f(C)}$ étant compact, il est inclus dans une boule fermée B , elle-même compacte. On définit l'application

$$g = f \circ p_C : B \rightarrow f(C) \subset B,$$

g est continue comme composée d'applications continues. D'après le théorème de Brouwer, elle a donc un point fixe $x = g(x)$. Or l'image de g est incluse dans C , donc $x \in C$, et donc $g(x) = f(p_C(x)) = f(x) = x$. Ainsi, f a un point fixe dans C .

(Alternativement, on peut construire un homéomorphisme de C sur B , voir section 2.)

2. Etudions maintenant le cas où E est de dimension infinie.

On va se ramener à la dimension finie en considérant des intersections avec des sous-espaces de dimension finie, quitte à perturber notre application f . Il faudra ensuite montrer que la suite des points fixes des applications modifiées tend bien vers un point fixe de f .

Fixons $n \geq 1$ et recouvrons $\overline{f(C)}$ par des boules ouvertes de rayon $\frac{1}{n}$:

$$\overline{f(C)} \subset \cup_{x \in f(C)} B(x, \frac{1}{n}).$$

$f(C)$ étant relativement compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e.

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, \dots, x_k, \overline{f(C)} \subset \cup_{j=1}^k B(x_j, \frac{1}{n}).$$

(Notons que k et les x_i dépendent aussi de n . Pour simplifier l'écriture, on ne fait pas apparaître cette dépendance.)

Considérons le sous-espace affine E_n engendré par les $x_j, 1 \leq j \leq k$, et notons

$$C_n = E_n \cap C.$$

C_n est convexe fermé comme intersection de convexes fermés. L'application f est bien définie sur C_n , mais à valeurs dans $f(C)$. Il faut donc composer à gauche avec une application à valeurs dans C_n .

- Dans le cas hilbertien, il suffit de considérer $T_n = p_n \circ f|_{C_n}$, où p_n est la projection sur le convexe fermé non vide C_n . L'application $T_n : C_n \rightarrow C_n$ est continue, et son image $T_n(C_n) = p_n(f(C_n))$ est relativement compacte (image d'un relativement

compact par p_n qui est continue), donc d'après le point 1 elle a un point fixe $a_n = p_n(f(a_n)) \in C_n$.

Faisons tendre n vers $+\infty$. La suite $f(a_n)$ reste dans le compact $\overline{f(C)} \subset C$, donc on peut en extraire une sous-suite qui converge vers $l \in C$. Il reste à prouver que l est un point fixe de f .

À n fixé, on a :

$$\|f(a_n) - a_n\| = \|f(a_n) - p_n(f(a_n))\| = d(f(a_n), C_n).$$

Or $f(a_n) \in f(C) \subset \cup_{j=1}^k B(x_j, \frac{1}{n})$ donc

$$d(f(a_n), C_n) \leq \min(\|f(a_n) - x_i\|, i = 1, \dots, k) \leq \frac{1}{n}.$$

On en déduit que $\|f(a_n) - a_n\|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Or $f(a_n)$ tend vers l , donc il en résulte que a_n tend vers l . De plus, f étant continue, on obtient $f(l) = l$.

- Dans le cas d'un evn général, on ne peut plus utiliser la projection. Il faut donc définir à la main une application continue p_n qui envoie C dans C_n , et vérifie :

$$\forall x \in f(C), \|p_n(x) - x\| \leq \frac{1}{n}.$$

On va construire p_n comme combinaison convexe des x_i , en posant

$$p_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^k \varphi_{i,n}(x) x_i}{\sum_{i=1}^k \varphi_{i,n}(x)}, \quad \text{avec } \varphi_{i,n}(x) = \sup\left(\frac{1}{n} - \|x - x_i\|, 0\right).$$

Avec cette définition, p_n vérifie bien les hypothèses requises. Le reste de la démonstration est identique au cas hilbertien.

□

Remarque 1.4.2 – *Il est intéressant de noter que ce résultat est valable en dimension infinie, bien que sa démonstration s'appuie sur un résultat de dimension finie (Brouwer) et utilise (dans la version générale : E evn quelconque) la projection en dimension finie uniquement.*

L'énoncé du théorème 1.4.6 (en dimension infinie) peut permettre de démontrer le théorème de Cauchy-Peano sans passer par les solutions approchées par la méthode d'Euler : on se ramène à un argument de point fixe (comme dans la démonstration classique du théorème de Cauchy-Lipschitz) en transformant le problème de Cauchy en une équation intégrale...

Théorème 1.4.7 (Cauchy-Peano) – Soit E un espace de dimension finie, et f une application continue de E dans lui-même. Alors, pour $t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in E$, le problème de Cauchy

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = t_0 \quad (1.3)$$

admet une solution (non nécessairement unique) sur un voisinage de t_0 .

Preuve. – On remarque que le système (1.3) est équivalent à

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(y(t))dt,$$

où y est continue sur un intervalle de la forme $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, $\alpha > 0$.

On applique le théorème du point fixe de Schauder (théorème 1.4.6) sur l'espace

$$X = \mathcal{C}^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]),$$

muni de la norme infinie, où r et α sont à définir, et pour l'application F définie par

$$F(y)(x) = y_0 + \int_0^x f(y(t))dt.$$

Le convexe considéré est de la forme

$$C = \mathcal{C}^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], B_f(y_0, r)),$$

où r est à définir. Il est fermé et non vide.

La continuité de F ne pose pas de problème. On obtient la compacité de $\overline{F(C)}$ en utilisant le théorème de Arzela-Ascoli, pour un r et α bien choisis. Les détails sont laissés au lecteur. \square

Attention : on rappelle que ce théorème est valable seulement en dimension finie (si E est de dimension infinie, la boule $B_f(y_0, r)$ n'est plus compacte et donc $F(C)$ n'est plus relativement compacte dans X ...)

1.4.4 Application 2 : le théorème de Stampacchia*

Ce théorème généralise le théorème de Lax-Milgram. Il semble qu'il soit souvent présenté à l'oral de l'agreg, sans que les candidats soient toujours en mesure d'en donner une application ni même de motiver ce résultat (voir rapports du jury).

Théorème 1.4.8 (*Stampacchia*) – Soit H un espace de Hilbert, K un convexe fermé non vide. Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive, i.e.

$$\exists \alpha > 0, \exists C > 0, \forall u, v \in H, \quad |a(u, v)| \leq C|u||v|, \quad a(v, v) \geq \alpha|v|^2.$$

Alors pour toute $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in K$, tel que

$$\forall v \in K, \quad a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle_{H', H}$$

Remarque 1.4.3 D'après le théorème de Lax-Milgram, qui s'applique sous les mêmes hypothèses sur a , on sait déjà que, pour φ donnée : il existe un unique $w \in H$, tel que

$$\forall v \in H, \quad a(w, v) = \langle \varphi, v \rangle_{H', H}$$

Ici, on veut imposer en plus à la solution de rester dans un sous-ensemble convexe K de H . Si w est dans K , alors c'est notre u , mais sinon il faut trouver un autre élément, et en général on n'aura pas égalité mais seulement une inégalité.

Exemple : si la forme bilinéaire a est tout simplement le produit scalaire, alors u sera le projeté de w sur K .

Ce théorème est souvent appliqué en prenant pour K un sous-espace affine, de sorte que l'inégalité précédente devient une égalité. Voir par exemple l'application citée ci-dessous.

Preuve. – (voir par exemple Brézis)

D'après le théorème de Riesz-Fréchet, il existe une unique $f \in H$ telle que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v), \forall v \in H.$$

De plus, à u fixé, $v \mapsto a(u, v)$ est linéaire, donc il existe un unique élément de H , noté Au , tel que $a(u, v) = (Au, v), \forall v \in H$. A est clairement un opérateur linéaire continu de H dans lui-même.

Le problème se ramène donc à trouver $u \in K$ tel que

$$(Au - f, v - u) \geq 0, \forall v \in K,$$

ou, de façon équivalente, en fixant $\rho > 0$,

$$(\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \leq 0, \forall v \in K.$$

D'après la caractérisation du projeté, cette relation signifie que $u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$.

Pour obtenir l'existence et l'unicité de u , il suffit donc montrer que, si ρ est bien choisi, l'application S de K dans lui-même définie par

$$S : v \in K \mapsto P_K(v + \rho f - \rho Av)$$

est contractante, i.e. vérifie : $|Sv_1 - Sv_2| \leq k|v_1 - v_2|, k < 1.$

Vérifions que c'est le cas pour

$$\rho \in \left] 0, \frac{2\alpha}{C^2} \right[.$$

Soient $v_1, v_2 \in H$, P_K étant 1-lipschitzienne, on a :

$$\begin{aligned} \|Sv_1 - Sv_2\|^2 &\leq \|v_1 - v_2 - \rho A(v_1 - v_2)\|^2 \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2 + \rho^2 C^2 \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho \langle A(v_1 - v_2), v_1 - v_2 \rangle \\ &\leq (1 + \rho^2 C^2 - 2\rho\alpha) \|v_1 - v_2\|^2. \end{aligned}$$

On montre que le coefficient est bien inférieur strictement à 1 lorsque

$$\rho \in \left] 0, \frac{2\alpha}{C^2} \right[.$$

□

Exemple d'application : EDP avec donnée non homogène

On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & x \in I =]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

où $f \in L^2(]0, 1[)$. On considère l'espace $H = H_0^1(I)$. L'existence et l'unicité d'une solution faible découlent du théorème de Lax-Milgram, avec $a(u, v) = \int_I (u'v' + uv)$ et $\varphi(v) = \int_I f v$.

On s'intéresse maintenant au problème avec données au bord non homogènes :

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & x \in I =]0, 1[\\ u(0) = \alpha, \\ u(1) = \beta. \end{cases}$$

où $f \in L^2(]0, 1[)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On ne peut plus appliquer Lax-Milgram, car l'espace des fonctions H^1 vérifiant la donnée au bord n'est plus un espace de Hilbert. On considère donc l'espace $H = H^1(I)$, et on définit

$$K = \{v \in H, v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}.$$

Alors K est un convexe de H . L'existence et l'unicité d'une solution faible découlent du théorème de Stampacchia, avec a et φ définies comme ci-dessus.

Remarque : on aurait pu aussi utiliser Lax-Milgram dans H_0^1 en cherchant la solution u sous la forme $u = u_0 + w$, u_0 satisfaisant les conditions au bord (par exemple affine) et w dans H_0^1 ...

Autre exemple : le problème de l'obstacle

Il s'agit d'un modèle mathématique pour un problème classique d'origine mécanique : trouver la forme prise par un élastique tendu au-dessus d'un obstacle.

Supposons donné un obstacle dont le bord a pour équation $y = \psi(x)$, ψ étant une fonction continue sur $[0, 1]$, avec $\psi(0) < 0$, $\psi(1) < 0$. On fixe un élastique aux points $(0,0)$ et $(1,0)$, au-dessus de l'obstacle. Quelle forme prend-il? On admet que sa forme peut être donnée par une équation $y = u(x)$, $x \in [0, 1]$. La fonction u est telle que la longueur totale de l'élastique est minimale. Elle est donc solution du problème :

$$\begin{cases} u \in K = \{v \in H_0^1(0, 1), v \geq \psi\} \\ J(u) \leq J(v), \forall v \in K \end{cases}$$

où

$$J(v) = \int_0^1 \sqrt{1 + v'(x)^2} dx.$$

Lorsque u' est petit, ou pour modéliser des problèmes différents du type propagation de la chaleur, on remplace J ci-dessus par

$$J(v) = \int_0^1 v'(x)^2 dx.$$

Le lien avec le théorème de Stampacchia est donné par le résultat suivant :

Proposition 1.4.9 *Soient H, K , a et φ comme dans le théorème de Stampacchia. On suppose de plus que a est symétrique. Alors on a équivalence entre les problèmes :*

$$\begin{cases} u \in K, \\ \forall v \in K, \quad a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle_{H', H} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u \in K, \\ \forall v \in K, \quad J(v) \geq J(u), \text{ où } J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle. \end{cases}$$

La preuve de cette proposition est facile et laissée en exercice. On obtient ainsi un résultat d'existence et d'unicité de la solution du "problème de l'obstacle".

1.5 Hahn-Banach et théorèmes de séparation

Désormais E est un espace vectoriel normé. On dit que H est un hyperplan affine [fermé] de E s'il existe une forme linéaire [continue] $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel α tels que

$$H = \{x \in E, f(x) = \alpha\}.$$

1.5.1 Les théorèmes de séparation classiques

Théorème 1.5.1 *Soient A et B deux convexes disjoints non vides de E .*

1. *Si A est ouvert, alors il existe un hyperplan fermé H qui sépare A et B au sens large, i.e.*

$$\exists(f, \alpha) \in E' \times \mathbb{R}, \quad \forall a \in A, \forall b \in B, f(a) \leq \alpha \leq f(b).$$

2. *Si A est fermé et B compact, alors il existe un hyperplan fermé H qui sépare A et B au sens strict, i.e.*

$$\exists(f, \alpha) \in E' \times \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \quad \forall a \in A, \forall b \in B, f(a) \leq \alpha - \epsilon < \alpha + \epsilon \leq f(b).$$

Remarque : de manière équivalente, on dira que l'hyperplan fermé $H = \{x \in E, f(x) = \alpha\}$ sépare A et B au sens large si

$$\sup_{a \in A} f(a) \leq \alpha \leq \inf_{b \in B} f(b)$$

et au sens strict si

$$\sup_{a \in A} f(a) < \alpha < \inf_{b \in B} f(b).$$

Nous verrons que la démonstration de ce théorème repose sur des arguments très différents, selon qu'on se place dans le cadre hilbertien ou dans un espace vectoriel normé quelconque.

Remarquons aussi que la séparation stricte n'est pas possible si on remplace l'hypothèse B compact par B fermé. Il suffit de considérer le contre-exemple suivant :

$$A = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, xy \geq 1\}, \quad B = \mathbb{R} \times]-\infty, 0].$$

1.5.2 Preuve dans le cas hilbertien

On va démontrer uniquement le résultat de séparation stricte (point 2 du théorème). Ici, la preuve repose essentiellement sur le théorème de projection déjà énoncé (voir par exemple HUL).

1. On commence par le cas où B est un singleton $\{x_0\}$, avec $x_0 \notin A$. Alors le vecteur $s = x_0 - p_A(x_0)$ vérifie

$$\langle s, x_0 \rangle > \sup_{y \in A} \langle s, y \rangle.$$

2. Prenons maintenant A et B comme dans le point 2. Notons

$$A - B = \{a - b, a \in A, b \in B\},$$

alors $A - B$ est convexe (somme de convexes), fermé (somme d'un fermé et d'un compact), et ne contient pas 0. D'après le point ci-dessus, il existe $s \in E$ tel que

$$\langle s, 0 \rangle = 0 > \sup_{(a,b) \in A \times B} \langle s, a - b \rangle.$$

On en déduit

$$\inf_{b \in B} \langle s, b \rangle > \sup_{a \in A} \langle s, a \rangle.$$

On a démontré le point 2. du théorème. □

Remarque 1.5.1 –

On a utilisé le résultat A fermé, B compact $\Rightarrow A + B$ fermé.

Rappelons que A, B fermés n'implique pas $A + B$ fermé. Citons le contre-exemple

$$A = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, xy \geq 1\}, \quad B = \mathbb{R} \times \{0\}, \quad A + B = \mathbb{R} \times]0, +\infty[.$$

1.5.3 Preuve dans le cas d'un evn*

Ici, la preuve repose essentiellement sur le théorème de Hahn-Banach (voir par exemple Brézis). Rappelons la forme analytique du théorème :

Théorème 1.5.2 (Hahn-Banach) – *Soit E un \mathbb{R} -ev, $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application positivement homogène et sous-additive (voir définitions page 15). Soit S un sous-espace vectoriel de E et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire telle que*

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in S.$$

Alors il existe F forme linéaire sur E telle que $F|_S = f$ et $F(x) \leq p(x), \forall x \in E$.

On rappelle que ce théorème se démontre en utilisant le lemme de Zorn, qui dit qu'un ensemble ordonné inductif non vide possède un élément maximal.

On admet ce théorème (voir Brézis) et on montre comment en déduire les résultats de séparation énoncés. Procédons par étapes.

1. Montrons le point 1 dans le cas où A est un convexe ouvert contenant 0 et où B est un singleton $\{x_0\}$. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème de Hahn-Banach avec $S = \mathbb{R}x_0$, $f(tx_0) = t$, et $p = \rho_A$ la jauge du convexe A . On a déjà montré qu'elle vérifiait les hypothèses du théorème. On obtient donc une forme linéaire F qui prolonge f et vérifie

$$\forall x \in E, F(x) \leq \rho_A(x).$$

En particulier, on obtient, $\forall x \in A, F(x) \leq 1 \leq F(x_0)$. On a donc séparé A et B au sens large par l'hyperplan d'équation $F(x) = 1$.

Vérifions que cet hyperplan est fermé, i.e. que F est continue. On a, pour tout $x \in E$,

$$F(x) \leq p(x) \leq M\|x\| \quad \text{et} \quad F(-x) = -F(x) \leq p(-x) \leq M\|x\|.$$

La continuité de F s'en déduit ; H est donc un hyperplan fermé.

2. Par translation, le même résultat est valable si $x_0 = 0 \notin A$.
3. Montrons le point 1. On pose $C = A - B$, alors C est convexe, de plus il est ouvert comme réunion d'ouverts :

$$C = \cup_{y \in B} (A - y).$$

On a aussi $0 \notin C$. D'après ce qui précède, on peut séparer $\{0\}$ et $A - B$, i.e. il existe f forme linéaire continue sur E telle que

$$\forall a \in A, \forall b \in B, f(a) < f(b).$$

D'où la séparation large de A et B par l'hyperplan fermé H d'équation

$$f(x) = \alpha = \sup_{a \in A} f(a) \leq \inf_{b \in B} f(b).$$

4. Il reste à montrer le point 2. Soient donc A et B convexes fermés disjoints, B compact. Pour tout $\epsilon > 0$ on définit

$$A_\epsilon = A + B(0, \epsilon), \quad B_\epsilon = B + B(0, \epsilon).$$

Alors A_ϵ et B_ϵ sont ouverts, convexes, non vides, et vérifient, pour ϵ assez petit, $A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset$ (la distance d'un fermé à un compact disjoint est strictement positive). On utilise le point 1. pour séparer A_ϵ et B_ϵ au sens large. Ainsi, on sépare A et B strictement.

1.5.4 Autres résultats*

En dimension finie, on peut facilement étendre le résultat de séparation large. En dimension infinie, on verra que la situation est beaucoup plus compliquée et contre-intuitive, en particulier il existe des convexes denses qu'on ne pourra pas séparer d'un singleton disjoint...

Exercice 1.5.1 – *En dimension finie, on peut toujours séparer deux convexes fermés disjoints non vides par un hyperplan fermé (au sens large).*

Preuve. – (voir par exemple Hiriart-Urruty-Lemaréchal) Soient A et B deux convexes fermés disjoints et non vides de \mathbb{R}^d . Fixons $a \in A, b \in B$, et posons $A_n = A \cap \bar{B}(a, n)$. Ainsi A_n est compact.

D'après le théorème de séparation stricte, il existe un hyperplan fermé H_n séparant A_n et B strictement. Notons N_n un vecteur unitaire normal à H_n et $c_n = H_n \cap [a, b]$. c_n est bien défini, car a et b sont de part et d'autre de H_n (par définition de la séparation), et on a :

$$H_n = \{x \in \mathbb{R}^d, \langle x - c_n, N_n \rangle = 0\}.$$

Les suites (c_n) et (N_n) sont relativement compactes, donc à une sous-suite près elles convergent vers c, N . Par passage à la limite dans les inégalités, on obtient que l'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^d, \langle x - c, N \rangle = 0\}$ sépare A et B au sens large. \square

Ce résultat est faux en dimension infinie. On propose le contre-exemple suivant (voir Bourbaki EVT, II p. 83, exo 10) :

Exercice 1.5.2 *Dans $E = l^1(\mathbb{N})$, on considère les ensembles suivants :*

$$D = \{u \in E, u_n = 0, \forall n \geq 1\}, \quad A = \bigcap_{n \geq 1} \{u \in E, |n^3 u_n - n| \leq u_0, \forall n \geq 1\}.$$

1. *Montrer qu'ils sont convexes, fermés, non vides.*
2. *Vérifier que $A \cap D = \emptyset$.*
3. *Montrer que $A - D$ est dense dans E .*
4. *En déduire qu'on ne peut pas séparer A et D au sens large par un hyperplan fermé.*

On peut aller encore plus loin et montrer le résultat suivant :

Exercice 1.5.3 – Montrer qu'en dimension $d < +\infty$, on peut toujours séparer au sens large deux convexes disjoints non vides par un hyperplan fermé.

Preuve. – On propose le schéma de preuve suivant (pas de référence).

- si l'un des convexes est d'intérieur non vide, par exemple A , alors on peut séparer B et l'intérieur de A (toujours convexe) au sens large par un hyperplan fermé H . Par passage aux adhérences, H sépare \overline{A} et \overline{B} au sens large, donc a fortiori A et B . (On note que pour A convexe, on a la relation $\overline{A} = \overline{\dot{A}}$.)
- si les deux convexes sont d'intérieur vide, cela signifie qu'ils sont inclus dans des sous-espaces affines de dimension strictement inférieure à d . L'idée est donc d'épaissir A de façon à obtenir un convexe \tilde{A} d'intérieur non vide, et tel que \tilde{A} soit disjoint de B . On applique ensuite le 1er cas.

Corollaire 1.5.3 – En dimension finie d , le seul convexe dense est \mathbb{R}^d .

Preuve. – Soit C un convexe dense dans \mathbb{R}^d . Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d \setminus C$. Alors on peut séparer C et $\{x\}$ au sens large par un hyperplan fermé. Ceci contredit la densité de C . \square

L'intérêt de ce résultat vient du fait qu'en dimension infinie, on sait qu'il existe des convexes denses non triviaux, par exemple des hyperplans denses (noyaux de formes linéaires non continues).

Lemme 1.5.4 Soit E un evn et l une forme linéaire non continue sur E . Alors son noyau est un hyperplan dense.

Preuve. – Soit $r > 0$ et notons $D = l(B(0, r))$. Alors D est un convexe équilibré de \mathbb{R} (i.e. $-D \subset D$). De plus, l n'étant pas continue, D est non borné. Donc $D = \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall x \in E, \forall r > 0, \exists y \in B(0, r), l(y) = -l(x).$$

On a donc pour tout $r > 0$ l'existence d'un élément $x + y \in \text{Ker}(l) \cap B(x, r)$. \square

Le fait que cette situation pathologique n'existe pas en dimension finie peut aussi se démontrer plus simplement en remarquant qu'en dimension d , tout point a un voisinage qui est combinaison convexe de $d + 1$ points. S'il existait un convexe dense C de \mathbb{R}^d , et $x \in \mathbb{R}^d \setminus C$, alors on pourrait construire un voisinage de x sous la forme

$$\text{co}(\{x_0, \dots, x_d\}).$$

Chaque point x_i pourrait être approché par un point y_i de C . Si $|x_i - y_i|$ est suffisamment petit, on aurait

$$x \in \text{co}(\{y_0, \dots, y_d\}) \subset C,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

1.5.5 Des applications*

Le corollaire ci-dessous est une conséquence directe des théorèmes de séparation. Il permet d'introduire la notion d'hyperplan d'appui qui sera vue dans la section suivante.

Corollaire 1.5.5 – Soit C un convexe non vide et non dense de E . Alors \bar{C} est l'intersection des demi-espaces fermés contenant C .

Preuve. – L'inclusion directe est évidente. Pour la réciproque, on considère $x \notin \bar{C}$. Alors on peut séparer au sens strict x et \bar{C} par un hyperplan fermé. Ainsi, le demi-espace fermé de frontière cet hyperplan, contenant C , ne contient pas le point x . \square

Remarque 1.5.2 On verra que ce corollaire a un pendant analytique : toute fonction convexe f semi-continue inférieurement (i.e. d'épigraphe fermé) est égale au suprémum des fonctions affines qui la minorent :

$$f = \sup\{g \text{ affines}, g \leq f\}.$$

Corollaire 1.5.6 – Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Si F n'est pas dense, alors

$$\exists f \in E', f \neq 0, \text{ telle que } \forall x \in F, \langle f, x \rangle = 0.$$

Preuve. – Soit $x_0 \notin \bar{F}$. On utilise le théorème de séparation stricte pour $\{x_0\}$ et \bar{F} . Il existe donc $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in F, \langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle.$$

Or F est un sous-espace vectoriel donc son image par f est soit \mathbb{R} (exclu d'après le résultat ci-dessus) soit $\{0\}$.

Remarque : On utilise en général la contraposée de ce corollaire pour montrer qu'un sous-espace est dense. \square

Le théorème de séparation dans le cas hilbertien permet notamment de démontrer le lemme de Farkas-Minkowski, qui est à la base des résultats en optimisation avec contraintes d'inégalité. Les coefficients λ_i issus du théorème sont alors appelés multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 1.5.7 – Soit H un espace de Hilbert, $a_1, \dots, a_k \in H$, fixés. On note

$$K = \{x \in H, (a_i, x) \leq 0, 1 \leq i \leq k\}.$$

Soit $p \in H$ vérifiant : $\forall x \in K, (p, x) \geq 0$. Alors

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0, \text{ tels que } p = - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i.$$

Démonstration :

Première étape

Notons $C = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq k \right\}$. On va montrer que C est un cône convexe fermé.

- Il est clair que C est un cône : $\forall x \in C, \forall t \geq 0, tx \in C$.
- On vérifie aisément que C est convexe.
- Montrons que C est fermé. Si les a_i sont linéairement indépendants, c'est clair. En effet, dans ce cas, soit (x_n) une suite d'éléments de C , qui converge dans H vers x . Écrivons

$$x_n = \sum_{i=1}^k \lambda_i^n a_i.$$

Par l'indépendance linéaire des a_i , les λ_i^n sont uniquement déterminés. Nécessairement, x appartient à l'espace vectoriel engendré par les $a_i, 1 \leq i \leq k$, qui est fermé : ainsi, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i,$$

et on a, pour tout i , $\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_i^n \geq 0$. Donc $x \in C$.

- Supposons maintenant que les a_i soient liés ; on a donc une relation

$$\sum_{i=1}^k \mu_i a_i = 0, \quad (\mu_1, \dots, \mu_k) \neq (0, \dots, 0).$$

En particulier, on n'a plus unicité de la décomposition $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$. Ainsi, il n'est plus du tout clair que C soit fermé. On va montrer que C est une réunion finie de cônes engendrés par des vecteurs linéairement indépendants. Vérifions d'abord que

$$C = \cup_{1 \leq j \leq k} C_j, \quad \text{où } C_j = \left\{ \sum_{i \neq j} \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0, i = 1 \dots k \right\}. \quad (1.4)$$

Il est clair que chacun des cônes C_j est inclus dans C . Réciproquement, soit $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \in C$. Quitte à remplacer (μ_1, \dots, μ_k) par son opposé, on peut supposer qu'un des μ_i au moins est strictement négatif. Notons alors

$$t = \min_{i/\mu_i < 0} \left(\frac{-\lambda_i}{\mu_i} \right).$$

Ainsi, il existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tel que $t = -\lambda_j/\mu_j$. On a alors

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + t\mu_i) a_i = \sum_{i \neq j} (\lambda_i + t\mu_i) a_i.$$

Donc $x \in C_j$. On a montré l'égalité (1.4). On réitère le procédé sur chaque C_j jusqu'à obtenir des vecteurs linéairement indépendants, ce qui permet d'écrire C comme une réunion finie de cônes fermés. C est donc fermé.

Deuxième étape :

Supposons maintenant que $-p \notin C$. On a : C est un convexe fermé, $\{-p\}$ est un convexe compact disjoint de C , on peut donc les séparer au sens strict par un hyperplan fermé, i.e.

$$\exists u \in H, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in C, (v, u) < \alpha < (-p, u). \quad (1.5)$$

C est un cône qui contient 0 donc on en déduit que $\alpha > 0$. D'autre part, la propriété de cône donne aussi :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall v \in C, \lambda v \in C, \text{ donc } (\lambda v, u) < \alpha.$$

En divisant par λ et en faisant tendre λ vers $+\infty$, on obtient

$$\forall v \in C, (v, u) \leq 0.$$

En particulier, il vient : $u \in K$. Cependant, on a, d'après la relation (1.5) : $(p, u) < -\alpha < 0$. Ceci contredit l'hypothèse sur p . Donc on a montré que $-p \in C$, ce qui donne bien le résultat cherché. \square

1.6 Points extrêmes et hyperplans d'appui

1.6.1 Hyperplans d'appui

Définition 1.6.1 – Soit C un convexe de E , et H un hyperplan affine de E . On dit que H est un hyperplan d'appui à C si C est inclus dans un demi-espace de frontière H et si

$$H \cap \partial C \neq \emptyset.$$

Si $x_0 \in H \cap \partial C$, on dit que H est un hyperplan d'appui à C en x_0 .

Proposition 1.6.1 – Soit C un convexe non vide de \mathbb{R}^d , $C \neq \mathbb{R}^d$. Alors pour tout $x \in \partial C$, il existe un hyperplan d'appui en x à C .

Preuve. – Soit $x \in \partial C$, et soient $x_n, n \in \mathbb{N}$ des points de $\mathbb{R}^d \setminus \bar{C}$ qui tendent vers x lorsque n tend vers l'infini. On a vu que \bar{C} est un convexe fermé non vide. On peut donc séparer au sens strict \bar{C} et x_n par un hyperplan fermé H_n , avec

$$H_n = \{y \in \mathbb{R}^d, \langle y, N_n \rangle = \alpha_n\} \quad \text{et } \forall y \in \bar{C}, \langle y, N_n \rangle < \alpha_n.$$

On peut supposer que les vecteurs normaux N_n sont de norme 1. Considérons $\alpha_n = \langle x_n, N_n \rangle$, alors H_n sépare toujours x_n et N_n , au sens large cette fois. De plus, la suite α_n ainsi définie est bornée.

Quitte à extraire des sous-suites, on peut donc supposer que N_n et α_n convergent vers des limites N et α . On montre alors aisément que

$$\forall y \in \bar{C}, \langle N, y \rangle \leq \alpha = \langle N, x \rangle.$$

Ainsi, l'hyperplan d'équation

$$\alpha = \langle N, y \rangle$$

est un hyperplan d'appui à C en x . □

Remarque : ce résultat reste vrai en dimension infinie, si E est un Banach séparable, et avec l'hypothèse supplémentaire : C non dense dans E . La démonstration est analogue à celle donnée ci-dessus, mais utilise la compacité faible étoile des boules du dual (théorème de Banach-Alaoglu). Attention toutefois à la rédaction précise, il faut utiliser le fait que la boule unité de E' est métrisable pour la topologie faible-étoile, afin d'utiliser la définition séquentielle de la compacité...

1.6.2 Points extrêmes

Définition 1.6.2 – Soit C un convexe d'un e.v. E . Un point $x \in C$ est dit extrême si

$$\nexists y_1, y_2 \in C, y_1 \neq y_2, \nexists t \in]0, 1[, x = ty_1 + (1 - t)y_2.$$

De façon équivalente, un point $x \in C$ est extrême si $C \setminus \{x\}$ est convexe.

Notation : on notera $Ext(C)$ l'ensemble des points extrêmes de C .

Exemple : les points extrêmes d'un polyèdre convexe de \mathbb{R}^d sont ses sommets.

Le théorème suivant, dû à Minkowski, est le résultat fondamental sur les points extrêmes d'un convexe en dimension finie.

Théorème 1.6.2 (*Minkowski*) – *Un convexe compact de \mathbb{R}^d est l'enveloppe convexe de ses points extrêmes.*

Attention ! Ce résultat est faux en dimension infinie. (En particulier, on a vu que l'enveloppe convexe d'un compact n'est pas toujours fermée...) Par contre, on a le résultat suivant :

Théorème 1.6.3 (*Krein-Milman, 1940*) – *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe. Alors tout convexe compact est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrêmes.*

La preuve du théorème de Krein-Milman est beaucoup plus difficile que celle de Minkowski (voir par exemple Rudin, analyse fonctionnelle). Nous ne la présenterons pas ici.

Preuve du théorème de Minkowski. – (voir par exemple HUL, Berger).

Soit C un convexe compact non vide de \mathbb{R}^d . Quitte à se placer dans un sous-espace affine de dimension convenable, on suppose que C est d'intérieur non vide. On raisonne par récurrence sur la dimension d .

- Cas $d = 0$. Alors C est un singleton, et le résultat est trivial.
- Soit $d \geq 1$, fixé. Supposons le résultat vrai pour les dimensions strictement inférieures. On considère donc un convexe compact C et on va montrer que tout point x de C est combinaison convexe de points extrêmes. Pour cela, on distingue deux cas, selon que x est un point intérieur ou sur le bord.
- Soit x sur le bord de C . Alors il existe H , hyperplan d'appui à C en x . On va se ramener à la dimension $d - 1$ en considérant le convexe $C \cap H$.
On a : $C \cap H$ est convexe, compact, non vide (il contient x) et de dimension au plus $d - 1$. Par récurrence, x est donc combinaison convexe de points extrêmes de $H \cap C$. Attention, pour conclure il faut justifier que les points extrêmes de $H \cap C$ sont aussi des points extrêmes de C . En fait, on montre le résultat suivant :

$$Ext(H \cap C) = Ext(C) \cap H.$$

(Seule l'inclusion \subset est importante ici.)

Preuve de l'inclusion \supset . Soit $u \in \text{Ext}(C) \cap H$, alors on a :

$$\forall y_1, y_2 \in C, y_1 \neq y_2, \forall t \in]0, 1[, ty_1 + (1-t)y_2 \neq u.$$

C'est donc vrai a fortiori si on considère $y_1, y_2 \in C \cap H$.

Preuve de l'inclusion \subset . Soit $u \in \text{Ext}(C \cap H)$, et supposons qu'on ait :

$$\exists y_1, y_2 \in C, y_1 \neq y_2, \exists t \in]0, 1[, ty_1 + (1-t)y_2 = u.$$

Plusieurs cas sont à envisager selon la position de y_1 et y_2 par rapport à H . Soit D le demi-espace ouvert de frontière H , contenant $\text{int}C$. Si $y_1, y_2 \in D$, alors par convexité, $u \in D$, ce qui contredit $u \in H$. Si $y_1 \in D, y_2 \in H$, alors on a aussi $u \in D$, ce qui contredit $u \in H$. Enfin, si $y_1, y_2 \in H$, alors on contredit le fait que $u \in \text{Ext}(C \cap H)$.

- Soit maintenant x un point intérieur. Alors il existe $x' \in C, x' \neq x$. On remarque que la droite (xx') coupe ∂C en deux points exactement (en effet, $(xx') \cap C$ est un convexe compact, donc c'est un segment $[y, z]$). D'après le point précédent, y et z sont combinaisons convexes de points extrémaux de C . Or x est combinaison convexe de y et z . D'où le résultat. \square

1.6.3 Exemples et Applications

1. Premier enseignement du théorème de Minkowski : en dimension finie, tout convexe fermé borné admet un point extrême.

En dimension infinie, ce résultat est vrai si on remplace "fermé borné" par "compact" (d'après le théorème de Krein-Milman). Par contre, le résultat est faux en dimension infinie sous l'hypothèse "fermé borné".

Contre-exemple :

Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_n \rightarrow 0\}$, muni de la norme infinie. Soit C la boule unité fermée de E . Alors C n'a pas de point extrême. En effet, soit $u \in C$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_n| < 1/2.$$

Construisons les suites v et w par

$$v_n = \begin{cases} u_n, & \text{si } n < N, \\ u_n + \frac{1}{2n}, & \text{sinon} \end{cases} \quad w_n = \begin{cases} u_n, & \text{si } n < N, \\ u_n - \frac{1}{2n}, & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors on a :

$$v, w \in C, \quad v \neq w, \quad u = (v + w)/2.$$

2. Pour minimiser une fonction concave (par exemple affine) sur un polyèdre convexe, il suffit de comparer les valeurs aux points extrémaux, c'est-à-dire aux sommets. Cette remarque est à l'origine des algorithmes du type simplexe en programmation linéaire.
3. Le théorème de Krein-Milman a de nombreuses applications en analyse fonctionnelle. En voici quelques exemples.
 - Il permet par exemple de montrer un théorème de Stone-Weierstrass généralisé (voir Rudin).
 - Il peut aussi être utilisé pour montrer que l'espace $C([0, 1], \mathbb{R})$ n'est pas le dual d'un espace de Banach (voir Brézis).
 - théorème de représentation intégrale de Choquet
 - existence d'une fonction de Green pour le laplacien
 - etc.

1.6.4 Vrai ou faux ?

1. Soit C un convexe compact non vide de E evn. Soit $l \in E'$. Alors il existe un hyperplan d'appui à C parallèle à $\text{Ker}(l)$.

VRAI. En effet, l est continue sur C compact, donc elle y est bornée et atteint ses bornes. Donc

$$\exists x_1, x_2 \in C, \forall y \in C, l(x_1) \leq l(y) \leq l(x_2).$$

Ainsi, les hyperplans d'équation $l(x) = l(x_1)$ et $l(x) = l(x_2)$ sont des hyperplans d'appui à C parallèles à $\text{Ker}(l)$.

2. Soit C un convexe fermé borné non vide de E evn. Soit $l \in E'$. Alors il existe un hyperplan d'appui à C parallèle à $\text{Ker}(l)$.

C'est bien-sûr vrai en dimension finie (cf ci-dessus). C'est FAUX en dimension infinie. On propose le contre-exemple suivant.

Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_n \rightarrow 0\}$, muni de la norme infinie. Soit C la boule unité fermée, et soit l la forme linéaire définie par

$$\forall u \in E, l(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} u_n.$$

Alors l est bien linéaire continue, et on a

$$\forall u \in E, |l(u)| \leq \|u\|_{\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 2\|u\|_{\infty}.$$

On a donc : $\forall u \in C, -2 \leq l(u) \leq 2$.

Clairement, il n'existe pas $u \in C$ telle que $|l(u)| = 2$. En effet,

$$|l(u)| = 2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = 1 \Rightarrow u \notin E.$$

D'autre part, on peut construire une suite minimisante

$$(u^p)_{p \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} \text{ avec } l(u^p) \rightarrow -2.$$

Il suffit de prendre

$$u_n^p = \begin{cases} -1 & \text{si } n \leq p, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi les hyperplans parallèles à $\text{Ker}(l)$, i.e. les

$$H_\alpha = \{x \in E, l(x) = \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}$$

sont de deux types :

- si $-2 < \alpha < 2$, alors C est "des deux côtés" de l'hyperplan H_α ,
- si $|\alpha| \geq 2$, alors C est dans un demi-espace de frontière H_α , mais $C \cap H_\alpha = \emptyset$.

3. Soit H hyperplan d'appui à C convexe fermé borné de E evn. Alors H contient toujours un point extrêmeal de C .

FAUX. Contre-exemple : E et C comme ci-dessus. $H = \{u \in E, u_0 = 1\}$. Alors H est un hyperplan d'appui à C . Or C n'a pas de point extrêmeal.

Chapitre 2

Fonctions convexes

CADRE : Les fonctions f considérées ici sont définies sur une partie convexe C d'un espace vectoriel normé (en abrégé evn) E (le plus souvent \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, mais la dimension infinie sera parfois évoquée) et à valeurs réelles.

2.1 Définitions, premières propriétés

2.1.1 Convexité

Définition 2.1.1 (*Convexité, convexité stricte, convexité forte*)

Soit C un convexe non vide de E et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$.

– f est dite convexe sur C si

$$\forall \theta \in]0, 1[, \forall x, y \in C, f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

– f est dite strictement convexe sur C si

$$\forall \theta \in]0, 1[, \forall x, y \in C, x \neq y, f(\theta x + (1 - \theta)y) < \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

– f est dite fortement convexe sur C s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \theta \in]0, 1[, \forall x, y \in C, x \neq y, f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y) - \frac{1}{2}\alpha\theta(1 - \theta)\|x - y\|^2.$$

On dit aussi que f est α -convexe.

Remarque 2.1.1 1. α -convexe \implies strictement convexe \implies convexe.

2. f est α -convexe sur C si et seulement si $f - 1/2\alpha\|\cdot\|^2$ est convexe sur C .

Remarque 2.1.2 – *La forte convexité est le cadre agréable pour de nombreux problèmes d'optimisation, car elle donne facilement l'existence, l'unicité, et des algorithmes de calcul performants ; c'est une hypothèse forte, mais elle inclut le cas des fonctions quadratiques, très important en pratique (cf ex.3 section 2.2).*

On montre aisément, à partir de la définition, les propriétés suivantes :

Proposition 2.1.1 (*Critère de l'épigraphe*) – *f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe, où*

$$\text{epi}(f) = \{(x, r) \in C \times \mathbb{R}, f(x) \leq r\}.$$

La preuve est laissée au lecteur. Remarquons que, de même qu'en géométrie, la « bonne » notion (pour les résultats de projection, de séparation, etc) est souvent celle de convexe fermé, de même en analyse convexe, on peut développer une théorie très riche sur les fonctions convexes semi-continues inférieurement (sci), avec la définition suivante.

Définition 2.1.2 – *Soit X un espace vectoriel topologique. Une fonction f est dite semi-continue inférieurement si son épigraphe est fermé. Dans le cas d'une topologie métrique, on a les définitions équivalentes suivantes :*

– *la fonction f est semi-continue inférieurement au point x si et seulement si, pour toute suite (x_n) tendant vers x , on a*

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n).$$

– *la fonction f est semi-continue inférieurement sur X si et seulement si elle est semi-continue inférieurement en tout point.*

Nous ne détaillerons pas ici la théorie des fonctions convexes sci.

Proposition 2.1.2 – *Une somme de fonctions convexes est convexe. Un supremum de fonctions convexes est convexe.*

En passant aux épigraphes, cette proposition découle directement du résultat qui dit qu'une somme, respectivement une intersection de convexes, est convexe.

Proposition 2.1.3 – *Soit f une fonction continue sur un convexe C . Alors*

1. *f est convexe sur C si et seulement si $\forall x, y \in C, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$;*
2. *f est α -convexe sur C si et seulement si*

$$\forall x, y \in C, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{\alpha}{8} \|x - y\|^2.$$

Preuve. – Il suffit de démontrer le deuxième point ; on obtiendra 1. en prenant $\alpha = 0$. Supposons donc que f vérifie la condition, et prenons $\theta \in]0, 1[$, $x, y \in C$. En utilisant la décomposition diadique, on sait qu'il existe une suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\theta_n = p_n/2^n$, $p_n \in \mathbb{N}$, qui converge vers θ quand n tend vers $+\infty$. On montre par récurrence sur n que

$$f(\theta_n x + (1 - \theta_n)y) \leq \theta_n f(x) + (1 - \theta_n)f(y) - \frac{\alpha}{2} \theta_n (1 - \theta_n) \|x - y\|^2.$$

Il reste à faire tendre n vers l'infini et utiliser la continuité de f . □

Remarque 2.1.3 – *L'hypothèse supplémentaire de continuité peut sembler restrictive. En réalité, on montrera que toute fonction convexe est continue dans l'intérieur de son domaine. Voir section 2.3.*

2.1.2 Premiers exemples

1. Toute fonction affine est trivialement convexe.
2. Si f est convexe, et φ convexe croissante, alors $\varphi \circ f$ est convexe. (La preuve est immédiate à partir de la définition.)
3. Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, alors la fonction Φ définie sur $[a, b]$ par

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(u) du$$

est convexe.

Remarque : si φ est continue, alors Φ est dérivable sur $[a, b]$, et sa convexité est une conséquence immédiate des résultats de la section 2. Cependant une preuve directe est possible, qui s'étend au cas où φ n'est pas continue.

Preuve. – Soient $x, y \in [a, b]$, $\alpha \in]0, 1[$, et supposons par exemple que $x < y$. Calculons la différence

$$\Delta = \Phi(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \Phi(x) - (1 - \alpha)\Phi(y).$$

La relation de Chasles sur les intégrales donne

$$\begin{aligned} \Delta &= -(1 - \alpha) \int_x^y \varphi(u) du + \int_x^{x+(1-\alpha)(y-x)} \varphi(u) du \\ &= -(1 - \alpha) \int_0^{y-x} \varphi(x+u) du + (1 - \alpha) \int_0^{y-x} \varphi(x+(1-\alpha)v) dv \\ &= (1 - \alpha) \int_0^{y-x} (\varphi(x+(1-\alpha)u) - \varphi(x+u)) du \leq 0, \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse φ croissante. □

4. Une norme sur un evn quelconque E est toujours convexe :

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha \in [0, 1], \|\alpha x + (1 - \alpha)y\| \leq \alpha\|x\| + (1 - \alpha)\|y\|.$$

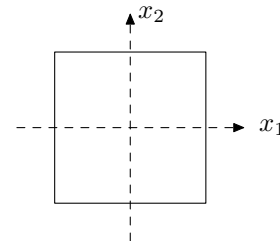
mais n'est jamais strictement convexe, puisqu'elle est positivement homogène :

$$\forall x \in E, \forall \alpha \in [0, 1], \forall \lambda > 0, \|\alpha x + (1 - \alpha)\lambda x\| = \alpha\|x\| + (1 - \alpha)\|\lambda x\|.$$

5. En utilisant les points 2 et 4, on obtient que l'application $\|\cdot\|^2$ est toujours convexe; par contre, elle n'est pas nécessairement strictement convexe.

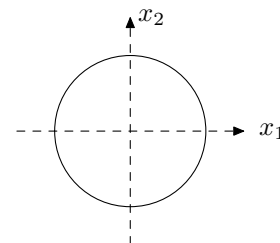
Contre-exemple : \mathbb{R}^2 , muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, cf dessin de la boule unité; on a

$$\left\| \frac{(1, -1) + (1, 1)}{2} \right\|^2 = 1 = \frac{1}{2} (\|(1, -1)\|^2 + \|(1, 1)\|^2).$$



6. Par contre, si $\|\cdot\|$ est une norme dérivant d'un produit scalaire (même en dimension infinie), l'application $\|\cdot\|^2$ est strictement, et même fortement convexe; en effet, elle est continue et vérifie :

$$\forall x, y, \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) - \frac{1}{4}\|x - y\|^2.$$



(Cette propriété implique l'existence et l'unicité d'un projeté sur une partie convexe fermée non vide dans un Hilbert, propriété qui n'existe plus en général dans le cas d'un Banach.)

D'autres exemples importants seront listés en section 2.2, en utilisant la caractérisation des fonctions convexes dans le cas différentiable/

2.1.3 Caractérisations et propriétés

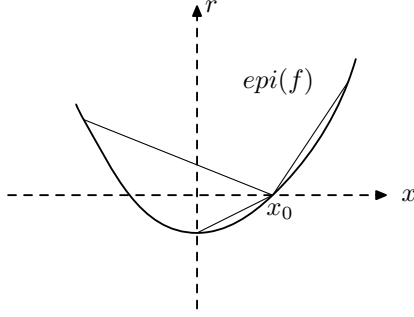
Les caractérisations suivantes se démontrent facilement à partir de la définition.

Proposition 2.1.4 (*Critère des pentes croissantes*)

Considérons $X = \mathbb{R}$; C est donc un intervalle de \mathbb{R} . Alors, f est convexe sur C si et seulement si, pour tout $x_0 \in C$, la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante sur $C \setminus \{x_0\}$.



Preuve. – Supposons d'abord f convexe. Soient $x_0 \in C, x, y \in C \setminus \{x_0\}$. Supposons $x < y$. Montrons l'inégalité :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$

– Si $x_0 < x$, alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $x = \theta x_0 + (1 - \theta)y$. On a alors :

$$f(x) \leq \theta f(x_0) + (1 - \theta)f(y).$$

On obtient le résultat voulu en soustrayant $f(x_0)$ à chaque membre, et en divisant par $x - x_0$, qui est positif.

– Le cas $x_0 > y$ se traite de façon analogue.

– Si par contre $x < x_0 < y$, alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $x_0 = \theta x + (1 - \theta)y$. On a alors :

$$f(x_0) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

On soustrait $f(x_0)$ aux deux membres, et on divise par $x - x_0$ qui est négatif. Le résultat en découle alors, en remarquant que

$$y - x_0 = \theta(y - x) = -\frac{\theta}{1 - \theta}(x - x_0).$$

Pour la réciproque, soient $x, y \in C, \theta \in]0, 1[$. Supposons $x < y$. On note $x_\theta = \theta x + (1 - \theta)y$. Alors, l'hypothèse assure que

$$\frac{f(x_\theta) - f(x)}{x_\theta - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Après quelques calculs élémentaires, on en déduit que

$$f(x_\theta) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

□

Remarque : ces propriétés sont de nature géométrique. Dans le cas d'une fonction de la variable réelle, la première caractérisation traduit simplement le fait que le graphe de f est toujours situé sous les cordes, tandis que la deuxième signifie que la pente des cordes reliant les points d'abscisse x_0 et d'abscisse x croît avec x .

Comme corollaire de la proposition 2, nous pouvons énoncer le résultat suivant, parfois utile, et pas si facile à démontrer directement :

Corollaire 2.1.5 – Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, on pose, pour $x > 0$, $g(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors g est convexe si et seulement si f est convexe.

Preuve. – Remarquons d'abord que $xg\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, donc il suffit de démontrer une des implications.

Supposons donc f convexe. Soit $x_0 > 0$, alors la fonction

$$x \mapsto s_f(1/x) = \frac{f(1/x) - f(1/x_0)}{1/x - 1/x_0} = \frac{-xx_0}{x - x_0}(f(1/x) - f(1/x_0))$$

est décroissante. Considérons la fonction pente de g définie sur $]0, +\infty[\setminus\{x_0\}$ par :

$$\begin{aligned} s_g(x) &= \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{xf(1/x) - x_0f(1/x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{x - x_0}{x - x_0}f(1/x_0) + \frac{x}{x - x_0}(f(1/x) - f(1/x_0)) \\ &= f(1/x_0) - \frac{1}{x_0}s_f(1/x). \end{aligned}$$

Il apparaît ainsi que s_g est croissante, donc g est convexe. □

Exemple : $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $]0, +\infty[$, donc $x \mapsto x \ln x$ aussi.

2.2 Caractérisations dans le cas différentiable

Dans cette section, on se place dans le cadre de fonctions définies au voisinage d'une partie convexe de \mathbb{R}^N , mais les résultats restent valables dans un Banach E , en remplaçant les gradients par des différentielles. Soit donc $C \subset \mathbb{R}^N$, convexe, et Ω un ouvert contenant C . On suppose ici que f est différentiable sur Ω .

On va établir des résultats qui généralisent les critères bien connus en dimension 1 :

- une fonction dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante ;
- une fonction dérivable est convexe si et seulement si son graphe est situé au-dessus des tangentes.

2.2.1 Encore une caractérisation géométrique

Théorème 2.2.1 – Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $C \subset \Omega$, convexe, et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, différentiable. On a les équivalences suivantes :

1. f est convexe sur C si et seulement si

$$\forall x, x_0 \in C, f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle.$$

2. f est strictement convexe sur C si et seulement si

$$\forall x, x_0 \in C, x \neq x_0, f(x) > f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle.$$

3. f est α -convexe sur C si et seulement si

$$\forall x, x_0 \in C, f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{\alpha}{2} \|x - x_0\|^2.$$

Remarque 2.2.1 Le membre de droite des inégalités 1 et 2 donne l'équation de l'hyperplan tangent au graphe en x_0 , tandis que celui de l'inégalité 3 donne l'équation d'un paraboloïde tangent au graphe en x_0 .

Preuve. –

1. Montrons d'abord la première équivalence. Supposons donc f convexe.

Soient $x, x_0 \in C$, on a donc, pour tout $\theta \in]0, 1[$,

$$f(\theta x + (1 - \theta)x_0) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(x_0),$$

soit :

$$\frac{f(\theta x + (1 - \theta)x_0) - f(x_0)}{\theta} \leq f(x) - f(x_0).$$

En passant à la limite quand θ tend vers 0, on obtient le résultat voulu.

Réciproquement, supposons les inégalités vérifiées et montrons que f est convexe.

Soient donc $x, y \in C, \theta \in]0, 1[$. Posons $x_0 = \theta x + (1 - \theta)y$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \\ f(y) &\geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), y - x_0 \rangle \end{aligned}$$

En multipliant la première inégalité par θ , la seconde par $1 - \theta$, et en les ajoutant, on obtient exactement :

$$\theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \geq f(x_0) = f(\theta x + (1 - \theta)y).$$

2. Pour le point 2, la réciproque se montre comme ci-dessus en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes. Par contre, on ne peut pas calquer la preuve du sens direct, car les inégalités strictes deviendraient larges à la limite $\theta \rightarrow 0$. On peut cependant appliquer le résultat du point 1. Soit donc f supposée strictement convexe, et deux points $x, x_0 \in C, x \neq x_0$. On a alors, pour tout $\theta \in]0, 1[$,

$$f(x_\theta) < \theta f(x) + (1 - \theta)f(x_0), \text{ où } x_\theta = \theta x + (1 - \theta)x_0.$$

Mais on a aussi, d'après le résultat 1. qu'on vient de montrer,

$$f(x_\theta) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x_\theta - x_0 \rangle.$$

En comparant ces deux inégalités, et en simplifiant $f(x_0)$, on obtient :

$$\theta \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle < \theta(f(x) - f(x_0)).$$

Il reste à diviser par θ pour obtenir le résultat recherché.

3. Pour le troisième point, on utilise la remarque 1.1 :

$$\begin{aligned} f \text{ } \alpha\text{-convexe} &\iff f - \frac{\alpha}{2} \|\cdot\|^2 \text{ convexe} \\ &\iff \forall x, x_0 \in C, \\ &\quad f(x) - \frac{\alpha}{2} \|x\|^2 \geq f(x_0) - \frac{\alpha}{2} \|x_0\|^2 + \langle \nabla f(x_0) - \alpha x_0, x - x_0 \rangle. \end{aligned}$$

Après simplification, on arrive à l'équivalence voulue. □

2.2.2 Fonctions monotones

Définition 2.2.1 – Soient $C \subset \mathbb{R}^n$, convexe, $\alpha \geq 0$ et soit une fonction $F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$.

– F est dite monotone sur C si

$$\forall x, y \in C, \langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0.$$

– F est dite strictement monotone sur C si

$$\forall x, y \in C, x \neq y, \langle F(x) - F(y), x - y \rangle > 0.$$

– F est dite α -monotone sur C si

$$\forall x, y \in C, \langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2.$$

Remarque 2.2.2 Attention, en dimension 1, une fonction est dite monotone au sens ci-dessus si et seulement si elle est croissante !

Théorème 2.2.2 – Si f est différentiable sur Ω , on a les équivalences suivantes :

1. f est convexe sur $C \iff \nabla f$ est monotone sur C .
2. f est strictement convexe sur $C \iff \nabla f$ est strictement monotone sur C .
3. f est α -convexe sur $C \iff \nabla f$ est α -monotone sur C .

Preuve. – Montrons le troisième point. Le premier s'en déduira en prenant $\alpha = 0$, et le deuxième se montre de manière analogue en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Supposons d'abord f α -convexe. Soient $x, y \in C$. Alors on a, d'après le théorème 1,

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2. \\ f(x) &\geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2. \end{aligned}$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient :

$$0 \geq \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), y - x \rangle + \alpha \|y - x\|^2,$$

i.e. ∇f est α -monotone.

Supposons maintenant que ∇f est α -monotone. Posons $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$, $t \in [0, 1]$. Alors φ est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout t ,

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_t), y - x \rangle, \text{ où } x_t = x + t(y - x).$$

Remarquons qu'en général, on ne peut pas écrire

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt,$$

car φ' n'a pas de raison d'être intégrable. Par contre, on va appliquer à φ l'inégalité des accroissements finis.

Soit $t \in [0, 1]$, alors

$$\varphi'(t) - \varphi'(0) = \frac{1}{t} \langle \nabla f(x_t) - \nabla f(x), x_t - x \rangle \geq \frac{\alpha}{t} \|x_t - x\|^2 = \alpha t \|y - x\|^2.$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\varphi(1) - \varphi(0) \geq \varphi'(0) + \int_0^1 \alpha t \|y - x\|^2 dt = \varphi'(0) + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2,$$

ce qui se réécrit :

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2.$$

Le théorème 1 permet de conclure que f est α -convexe. □

Corollaire 2.2.3 – Soit maintenant f deux fois différentiable sur C ouvert convexe. Alors f est convexe sur C si et seulement si, pour tout $x \in C$, $D^2f(x)$ définit une forme quadratique positive, i.e.

$$\forall x \in C, \forall v \in \mathbb{R}^N, \langle D^2f(x)v, v \rangle \geq 0.$$

Preuve. – Commençons par le sens direct. Soit donc f deux fois différentiable et convexe sur C . D'après le théorème précédent, ∇f est monotone sur C . Soient $x \in C$, $v \in \mathbb{R}^N$, alors pour t assez petit, $x + tv \in C$ et

$$\langle D^2f(x)v, v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \langle \nabla f(x + tv) - \nabla f(x), v \rangle \geq 0.$$

Pour la réciproque, on remarque que si $D^2f(x)$ est positive, alors la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne, pour tous $x \in C$, $v \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$ assez petit,

$$f(x + tv) = f(x) + t \langle \nabla f(x), v \rangle + \langle D^2f(x + \tau v)v, v \rangle \geq f(x) + t \langle \nabla f(x), v \rangle$$

avec un $\tau \in [0, t]$. On en déduit la convexité de f par l'intermédiaire du théorème 2.2.1.

2.2.3 Encore des exemples

1. sur \mathbb{R} , les fonctions $x \mapsto |x|^\alpha$, $\alpha > 1$, $x \mapsto e^{\beta x}$, $\beta \in \mathbb{R}$, sont convexes. (On le vérifie grâce aux caractérisations utilisant la dérivée.)
2. sur $]0, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto x^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, $x \mapsto -\ln x$, sont convexes. D'après le corollaire 1.4, $x \mapsto x \ln x$ est convexe.
3. *Exemple important pour les applications :*

Soient A une matrice symétrique réelle de taille N , $b \in \mathbb{R}^N$, et f une fonction définie sur \mathbb{R}^N par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle.$$

Alors

$$\begin{aligned} f \text{ est convexe} &\iff A \text{ est positive : } \langle Ax, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, \\ &\iff \text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont positives ou nulles.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \text{ est strictement convexe} &\iff A \text{ est définie positive : } \langle Ax, x \rangle > 0, \forall x \neq 0, \\ &\iff \text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont strictement positives.} \end{aligned}$$

Dans ce cas, f est même fortement convexe, avec une constante α égale à la plus petite valeur propre.

Preuve. – f est différentiable, et $\nabla f(x) = Ax - b$. A est symétrique, donc ses valeurs propres sont réelles, notons les $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$ (avec multiplicité). S'il existe une valeur propre strictement négative, il est clair que ∇f n'est pas monotone. Supposons donc le contraire. En diagonalisant A (qui est symétrique) dans une base orthonormée, on montre facilement que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \lambda_N \|x - y\|^2,$$

et que l'égalité est atteinte lorsque $x - y$ est vecteur propre associé à λ_N . Ainsi, d'après le théorème 2.2, si $\lambda_N = 0$, f est convexe mais non strictement convexe; si $\lambda_N > 0$, f est λ_N -convexe.

Remarque 2.2.3 – *Cet exemple est important car il fournit des algorithmes de résolution de systèmes linéaires. En effet, dans le cas où f est convexe et différentiable, on verra que son gradient s'annule uniquement lorsque f atteint un minimum (voir théorème 3.3). On peut donc appliquer des algorithmes de minimisation de f pour résoudre le système $Ax = b$ (en particulier, méthodes de gradient, gradient conjugué, etc.).*

4. Une fonction de deux variables (x, y) qui est convexe par rapport à x pour tout y et convexe par rapport à y pour tout x n'est pas nécessairement convexe par rapport au couple (x, y) .

Contre-exemple : la fonction f définie sur $(\mathbb{R}^+)^2$ par : $f(x, y) = xy$. On a, par exemple,

$$f(1, 1) = 1 > \frac{1}{2}(f(0, 2) + f(2, 0)).$$

5. *Somme des plus grandes valeurs propres d'une matrice symétrique*

Soit $E = S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles de taille $n \geq 1$, muni du produit scalaire

$$\langle\langle A, B \rangle\rangle = \text{tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}B_{ij}.$$

On associe à une matrice $A \in E$ ses valeurs propres, rangées par ordre décroissant :

$$\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A),$$

et une base orthonormée de vecteurs propres (v_1, \dots, v_n) . Pour tout entier m , $1 \leq m \leq n$, on note

$$f_m(A) = \sum_{j=1}^m \lambda_j(A).$$

On va montrer que f_m est convexe, en vérifiant l'égalité :

$$\forall A \in E, f_m(A) = \sup\{\langle Q^t Q, A \rangle, Q \in \Omega_m\}, \quad (2.1)$$

où $\Omega_m = \{Q \in M_{n,m}(\mathbb{R}), {}^t Q \cdot Q = I_m\}$.

Approche algébrique

Remarquons que les matrices $Q \in \Omega_m$ sont exactement les matrices de projection sur des sous-espaces vectoriels $F \subset \mathbb{R}^n$ de dimension m . Par ailleurs, si q désigne la forme quadratique canoniquement associée à A sur \mathbb{R}^n , on a, pour une matrice $Q \in \Omega_m$, représentant la projection sur un sous-espace $F \subset \mathbb{R}^n$,

$$\langle Q^t Q, A \rangle = \text{tr}(Q^t Q A) = \text{tr}({}^t Q A Q)$$

est la trace de la restriction à F de la forme quadratique. La formule (2.1) signifie donc que la somme des m plus grandes valeurs caractéristiques de q ne peut que diminuer par restriction à un sous-espace de dimension m . (Attention : les sous-espaces considérés n'étant a priori pas stables par A , les valeurs caractéristiques de q restreintes à F ne forment pas un sous-ensemble de celles de q .) On obtient toutefois le résultat (2.1) par itérations successives du résultat suivant :

Lemme 2.2.4 – Soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n , de valeurs caractéristiques $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ (i.e. il existe une base orthonormée, dans laquelle $q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$). Si H est un hyperplan de \mathbb{R}^n et $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ sont les valeurs caractéristiques de la restriction de q à H , on a les inégalités

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n.$$

□

Approche analytique

Pour qui ne connaît pas ce lemme, une preuve directe de (2.1) est possible mais, du fait de la non-stabilité des sous-espaces, elle n'est pas immédiate. On peut utiliser le théorème des extrema liés pour se ramener au cas où les sous-espaces sont stables.

1ère étape : Notons, pour $Q \in \Omega_m$, $\varphi_A(Q) = \langle Q^t Q, A \rangle$. Remarquons que :

$$\forall Q \in \Omega_m, \quad \varphi_A(Q) = \text{tr}(Q^t Q A) = \text{tr}({}^t Q A Q) = \sum_{j=1}^m \langle A C_j, C_j \rangle, \quad (2.2)$$

où (C_1, \dots, C_m) sont les vecteurs colonnes de la matrice Q , et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n . (En particulier, l'égalité (2.1) est claire pour $m = 1$ et pour $m = n$.) De plus, la fonction φ_A est différentiable sur Ω_m , de différentielle

$$D\varphi_A(\bar{Q}) \cdot Q = 2 \sum_{j=1}^m \langle A \bar{C}_j, C_j \rangle$$

où (C_1, \dots, C_m) sont les vecteurs colonnes de la matrice Q , $(\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_m)$ sont les vecteurs colonnes de la matrice \bar{Q} .

Par ailleurs,

$$\Omega_m = \{Q \in M_{n,m}(\mathbb{R}), \forall i, j = 1 \dots m, \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij}\}.$$

En particulier, Ω_m est fermé et borné donc compact. Ainsi, le sup de φ_A sur Ω_m est bien défini et est atteint.

2ème étape : Notons encore, pour $1 \leq i, j \leq m$:

$$\forall Q \in M_{n,m}(\mathbb{R}), \quad h_{i,j}(Q) = \langle C_i, C_j \rangle - \delta_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Chaque fonction h_{ij} est différentiable, de différentielle définie par :

$$Dh_{i,j}(\bar{Q}) \cdot Q = 2\langle \bar{C}_i, C_j \rangle.$$

En particulier, on voit qu'en tout point $\bar{Q} \in \Omega_m$, ces différentielles sont linéairement indépendantes. En effet, si $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i, j \leq m}$ sont tels que

$$\forall Q \in M_{n,m}(\mathbb{R}), \quad \sum_{i,j=1}^m \lambda_{i,j} Dh_{i,j}(\bar{Q}) \cdot Q = 0,$$

alors en choisissant une matrice Q dont les vecteurs colonnes sont nuls sauf le vecteur C_i qui est égal à \bar{C}_j , on montre que $\lambda_{i,j}$ est nul.

On peut donc appliquer le théorème des extrema liés qui donne une condition nécessaire sur les points où le maximum est atteint. Ainsi, si le maximum de φ_A sur Ω_m est atteint en \bar{Q} , il existe des réels $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i, j \leq m}$ tels que

$$\forall Q \in M_{n,m}(\mathbb{R}), \quad D\varphi_A(\bar{Q}) \cdot Q = \sum_{i,j=1}^m \lambda_{i,j} Dh_{i,j}(\bar{Q}) \cdot Q.$$

Il en découle que

$$\forall C_1, \dots, C_m \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{j=1}^m \langle A\bar{C}_j, C_j \rangle = \sum_{i,j=1}^m \lambda_{i,j} \langle \bar{C}_i, C_j \rangle,$$

donc

$$A\bar{C}_j = \sum_{i=1}^m \lambda_{i,j} \bar{C}_i, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Ainsi, l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A laisse stable le sous-espace de \mathbb{R}^n engendré par les vecteurs $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_m$, et la matrice $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{1 \leq i, j \leq m}$ n'est autre que la matrice de la restriction de cet endomorphisme dans la base $(\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_m)$.

On a alors : $\varphi_A(\bar{Q}) = \sum_{j=1}^m \langle A\bar{C}_j, \bar{C}_j \rangle = \text{tr}(\Lambda)$. Or les valeurs propres de Λ sont m valeurs propres de A , on a donc : $\varphi_A(\bar{Q}) = \text{tr}(\Lambda) \leq f_m(A)$, et donc :

$$\forall Q \in \Omega_m, \quad \varphi_A(Q) \leq \varphi_A(\bar{Q}) \leq f_m(A).$$

3ème étape : Il est facile de vérifier que la valeur $f_m(A)$ est effectivement atteinte par φ_A sur Ω_m . Il suffit pour cela de choisir une matrice \bar{Q} dont les colonnes sont les vecteurs propres (v_1, \dots, v_m) associés aux valeurs propres $\lambda_1(A), \dots, \lambda_m(A)$, et d'appliquer la formule (2.2). On a donc démontré l'égalité (2.1). La convexité de f_m découle directement de cette égalité car on a vu qu'un sup de fonctions convexes est toujours convexe (proposition 1.1). \square

En prenant $m = 1$, on obtient en particulier la convexité de la première valeur propre λ_1 . En prenant $m = n - 1$, on obtient que $f_{n-1} = \text{tr} - \lambda_n$ est convexe. Or la trace est linéaire, donc concave; on en déduit donc que la plus petite valeur propre $\lambda_n = \text{tr} - f_{n-1}$ est concave comme somme de fonctions concaves.

Ces deux cas particuliers pouvaient aussi se déduire du théorème de Rayleigh-Ritz :

$$\lambda_1(A) = \max_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle, \quad \lambda_n(A) = \min_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle.$$

2.3 Quelques résultats importants sur les fonctions convexes

2.3.1 Inégalités de convexité

Ce résultat est parfois désigné sous le nom de "théorème de Jensen discret". Le vrai théorème de Jensen (difficile) est énoncé dans la section suivante.

Théorème 2.3.1 – Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, convexe. Alors, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\forall x_1, \dots, x_k \in C, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in [0, 1]^k, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1,$$

$$f \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i).$$

Preuve. – Pour $k = 2$, c'est la définition; on passe à des entiers $k \geq 3$ par une récurrence facile. Voir par exemple [2].

Applications : voir par exemple [2]

$$-\ln \text{ convexe} \Rightarrow \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i. \quad (2.3)$$

$$x \mapsto x \ln x \text{ convexe} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \right)^{\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i} \leq \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i x_i}. \quad (2.4)$$

$$x \mapsto \frac{-1}{1+e^{-x}} \text{ convexe} \Rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1+x_i} \leq \left(1 + \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i} \right)^{-1} \quad (2.5)$$

La première inégalité est connue sous le nom d'inégalité arithmético-géométrique. Elle permet par exemple d'obtenir l'inégalité de Hölder :

$$\forall f, g : X \rightarrow \mathbb{C}, \text{ mesurables}, \forall p, p' \in]1, +\infty[, \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^{p'} d\mu \right)^{1/p'},$$

d'où on déduit également l'inégalité de Minkowski,

$$\forall f, g : X \rightarrow \mathbb{C}, \text{ mesurables}, \forall p \in]1, +\infty[,$$

$$\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

2.3.2 Inégalité de Jensen

Théorème 2.3.2 – Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace de probabilité, I un intervalle non vide, et $f : X \rightarrow I$ une fonction intégrable. Alors, pour toute fonction convexe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\varphi \circ f$ soit intégrable, on a :

$$\varphi \left(\int_X f d\mu \right) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

Remarque : on retrouve le théorème 2.3.1 dans le cas particulier où

$$X = \mathbb{R}, \mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}.$$

En dehors de ce cas particulier, les applications de l'inégalité de Jensen concernent notamment la physique statistique et la théorie de l'information. Citons l'exemple suivant, très utile en physique statistique :

Corollaire 2.3.3 – Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilité. Alors on a :

$$e^{E(X)} \leq E(e^X).$$

2.3.3 Continuité des fonctions convexes

Les propriétés de continuité d'une fonction convexe sont importantes mais moins simples qu'il n'y paraît. Voir les commentaires qui suivent l'énoncé du théorème 2.3.5. On commence par un résultat facile dans le cas où la fonction est bornée.

Théorème 2.3.4 – Soient Ω ouvert convexe de \mathbb{R}^N , et f convexe bornée sur Ω . Alors pour toute partie C incluse dans Ω , telle qu'il existe $\epsilon > 0$ avec $C + B_\epsilon \subset \Omega$, f est lipschitzienne sur C .

Preuve. –

La figure 2.3.3 permet de comprendre et mémoriser l'idée de cette preuve. Soit $M > 0$ tel que $\forall x \in \Omega, |f(x)| \leq M$. On va montrer qu'alors f est $2M/\epsilon$ -lipschitzienne sur C , i.e.

$$\forall x, y \in C, |f(x) - f(y)| \leq \frac{2M}{\epsilon} \|x - y\|.$$

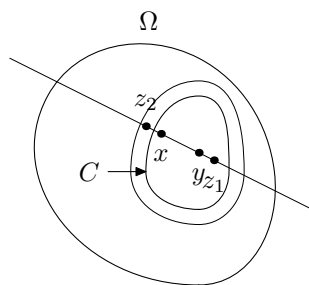


FIG. 2.1 – Preuve du théorème 3.2.

Prenons donc $x, y \in C, x \neq y$. On peut alors tracer la droite (xy) . Notons z_1 et z_2 les points de cette droite obtenus en translatant y , respectivement x , d'une distance ϵ vers l'extérieur du segment :

$$z_1 = y + \epsilon \frac{y - x}{\|y - x\|}, \quad z_2 = x + \epsilon \frac{x - y}{\|y - x\|}.$$

Alors z_1 et z_2 sont dans Ω . De plus, y appartient à l'intérieur du segment $[x, z_1]$, c'est-à-dire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $y = \theta x + (1 - \theta)z_1$. On peut calculer θ en remplaçant z_1 par sa définition, et on obtient

$$\theta = \frac{\epsilon}{\|x - y\| + \epsilon}.$$

Alors, par convexité de f , on a :

$$\begin{aligned} f(y) &\leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(z_1) \\ f(y) - f(x) &\leq (1 - \theta)(f(z_1) - f(x)) \leq 2M(1 - \theta) = 2M \frac{\|y - x\|}{\|y - x\| + \epsilon} \leq \frac{2M}{\epsilon} \|y - x\|. \end{aligned}$$

Le même raisonnement, appliqué cette fois au point z_2 , donne

$$f(x) - f(y) \leq \frac{2M}{\epsilon} \|y - x\|.$$

D'où le résultat. □

Remarque : voir par exemple [2] pour la preuve dans \mathbb{R}^N , ou [3] pour le cas $N = 1$ (c'est exactement la même preuve). Le théorème et sa preuve sont encore valables en dimension infinie, mais dans ce cas, l'hypothèse "fonction bornée" est particulièrement forte.

Théorème 2.3.5 – Soit f une fonction convexe définie sur un ouvert convexe Ω de \mathbb{R}^N . Alors f est continue sur Ω , et lipschitzienne sur tout compact de Ω .

La preuve consiste naturellement à montrer que la fonction est bornée au voisinage de chacun de ses points, et à appliquer le résultat précédent. Notons au passage que ce corollaire ne se généralise pas à la dimension infinie (contre-exemple simple : il existe des fonctions linéaires non continues). Cela tient au fait qu'en dimension infinie, les fonctions convexes ne sont pas nécessairement localement bornées.

Comment montrer qu'une fonction est bornée au voisinage d'un point ? On voit qu'en dehors du cadre classique des fonctions continues, on est souvent bien démuni. L'idée va être, dans un premier temps, de minorer f en la comparant à une fonction affine (voir le lemme ci-dessous), et dans un deuxième temps, de la majorer à l'aide des inégalités de convexité.

Lemme 2.3.6 – Soit Ω un ouvert convexe non vide de \mathbb{R}^N , et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors il existe une fonction affine g qui minore f sur Ω . De plus, pour tout $x_0 \in \Omega$, on peut choisir g telle que $g(x_0) = f(x_0)$.

(On peut montrer que ce lemme se généralise à un Banach, fournissant une application linéaire continue g , à condition que l'épigraphe de f ne soit pas dense dans $E \times \mathbb{R}$. Cette hypothèse supplémentaire exclut en particulier le cas où f est linéaire non continue. Le lemme se démontre alors de la même façon, l'existence d'un hyperplan d'appui étant dans ce cas une conséquence du théorème de Hahn-Banach.)

Preuve. – Soit C l'épigraphe de f , alors C est convexe, non vide, et pour $x_0 \in \Omega$ fixé, on a $(x_0, f(x_0)) \in C$. On sait alors qu'il existe un hyperplan d'appui à C en $(x_0, f(x_0))$, i.e. il existe une application linéaire l et un réel α tels que

$$(l, \alpha) \neq (0, 0), \quad \text{et } \beta = l(x_0) + \alpha f(x_0) \leq l(x) + \alpha r, \quad \forall (x, r) \in C. \quad (2.6)$$

On va montrer que α est strictement positif. En effet, supposons d'abord $\alpha < 0$. En considérant les points $(x, f(x) + n)$, où $x \in C$ est fixé, et $n \in \mathbb{N}$ tend vers $+\infty$, on contredit la relation (2.6). Supposons maintenant que $\alpha = 0$. La relation (2.6) signifie que l'application linéaire l , restreinte à Ω , atteint en x_0 un minimum. Or Ω est ouvert, et l linéaire, donc si elle atteint un minimum, c'est qu'elle est identiquement nulle. Cela contredit l'hypothèse $(l, \alpha) \neq (0, 0)$. D'où $\alpha > 0$. En prenant $r = f(x)$ et en divisant par α dans l'inégalité (2.6), on obtient alors

$$f(x) \geq g(x) = -\frac{1}{\alpha}(l(x) - \beta).$$

On vérifie aisément que g est affine, et que $g(x_0) = f(x_0)$. □

Il reste à prouver le théorème. Soit donc Ω un ouvert convexe de \mathbb{R}^N et f une fonction convexe sur Ω . Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$, on veut montrer que f est bornée sur un voisinage de x_0 . L'idée est de choisir comme voisinage particulier un simplexe

$$\Delta = \text{co}(s_0, \dots, s_N) \text{ tel que } x_0 \in \overset{\circ}{\Delta} \text{ et } \exists \epsilon > 0, \Delta + \bar{B}_\epsilon \subset \Omega.$$

(Par exemple, tout simplexe régulier inscrit dans une sphère euclidienne centrée en x_0 et incluse dans Ω convient. Notons que des voisinages de ce type ne peuvent être exhibés qu'en dimension finie.) D'après le lemme, il existe g affine qui minore f ; g est continue sur le compact Δ donc y est bornée, d'où f est minorée sur Δ . Par ailleurs, tous les éléments de Δ sont combinaisons convexes des sommets s_0, \dots, s_N . Ainsi,

$$\forall x = \sum_{i=0}^N \alpha_i s_i, \quad f(x) \leq \sum_{i=0}^N \alpha_i f(s_i) \leq \sum_{i=0}^N f(s_i)$$

donc f est majorée sur Δ . Par application du théorème 2.3.4, on obtient la continuité de f sur Ω .

Par ailleurs, si K est un compact inclus dans Ω , alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $K + \bar{B}_{2\epsilon} \subset \Omega$. D'après ce qui précède, f est continue sur le convexe compact $K + \bar{B}_\epsilon$, donc y est bornée. Il reste à appliquer le théorème 2.3.4 pour obtenir que f est lipschitzienne sur K . □

De cette propriété, on peut déduire le résultat suivant :

Proposition 2.3.7 *Soit (f_n) une suite de fonctions convexes sur \mathbb{R}^N , qui converge simplement vers une limite f . Alors f est convexe, et la convergence est uniforme sur tout compact.*

Preuve. – (voir HUL). La convexité de f est immédiate par passage à la limite. Montrons maintenant que la convergence de la suite est uniforme sur tout compact. Il suffit de le vérifier pour des compacts de la forme $S = \bar{B}(0, r)$, $r > 0$. La preuve se fait en trois étapes :

1. On montre que la suite (f_n) est bornée indépendamment de n sur S . Pour cela, on introduit la fonction $g = \sup_k f_k$. Alors g est convexe et vérifie :

$$\forall x \in S, g(x) = \sup f_k(x) < +\infty.$$

D'après le théorème précédent, on en déduit que g est continue sur S , d'où

$$\exists M > 0, \forall x \in S, \forall k, f_k(x) \leq g(x) \leq M.$$

Cherchons maintenant à minorer uniformément les fonctions f_k sur S . D'autre part, la suite $(f_k(0))$ est convergente donc minorée, i.e.

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \forall k, f_k(0) \geq \mu.$$

Par convexité de f_k , on a aussi, pour tout $x \in S$,

$$f_k(x) \geq 2f_k(0) - f_k(-x) \geq 2\mu - M,$$

donc les fonctions f_k sont bien minorées uniformément sur S .

2. On en déduit que les f_n , et donc également la fonction f , sont lipschitziennes sur S , de constante de Lipschitz K indépendante de n .
3. Pour $\epsilon > 0$, on recouvre S par un nombre fini de boules de rayon ϵ , centrées en des points $x_i, i = 1..m$. Pour $x \in S$, il existe donc i tel que $x \in B(x_i, \epsilon)$. On décompose

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)|$$

et on majore chaque terme indépendamment de x , pour n assez grand, en utilisant la propriété de Lipschitz pour le 1er et le 3ème terme, et la convergence ponctuelle au point x_i pour le deuxième terme. Il vient :

$$\exists k_0 \text{ (indépendant de } x) \text{ tel que } \forall k > k_0, \sup_{x \in S} |f_k(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

ce qui donne bien la convergence uniforme sur S . □

Notons au passage que, même en dimension finie, les fonctions convexes ne sont pas nécessairement continues au bord de leur domaine. On s'en convainc aisément en considérant la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.3.4 Dérivabilité

Remarque 2.3.1 – De la propriété de Lipschitz découle, en utilisant le théorème de Rademacher (dur) que toute fonction convexe est différentiable presque partout sur son domaine (presque partout au sens de la mesure de Lebesgue). Voir par exemple [1] pour une preuve du théorème de Rademacher. Ce résultat permet, par exemple, d'autoriser dans des calculs d'intégrale des changements de variable convexes.

Pour simplifier, nous allons nous limiter au cas de la dimension $N = 1$, et montrer que toute fonction convexe est dérivable sauf en un nombre au plus dénombrable de points.

Lemme 2.3.8 – Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} . Alors f admet une dérivée à gauche et à droite en tout point, i.e. pour tout $x_0 \in I$, le taux d'accroissement

$$\frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

admet une limite finie $f'_d(x_0)$ quand t tend vers 0^+ et une limite finie $f'_g(x_0)$ quand t tend vers 0^- . De plus, on a, pour tout $x_0 \in I$, $f'_d(x_0) \geq f'_g(x_0)$.

Preuve. – Ce résultat découle directement du critère des pentes croissantes, voir proposition 2.1.4. Soit en effet $x_0 \in I$. La fonction

$$t \mapsto \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

est croissante sur un intervalle ouvert contenant 0. Elle admet donc une limite finie quand t tend vers 0^+ et une limite finie quand t tend vers 0^- , et on a bien l'inégalité voulue. \square

Remarque 2.3.2 Si la fonction est définie jusqu'aux bornes de l'intervalle, on peut encore définir une dérivée à gauche ou à droite comme limite du taux d'accroissement, mais dans ce cas cette dérivée sera éventuellement infinie.

Théorème 2.3.9 – Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de \mathbb{R} . Alors f est dérivable sauf en un nombre au plus dénombrable de points.

Preuve. – Remarquons d’abord que pour $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, on a, toujours d’après le critère des pentes croissantes :

$$f'_d(x_1) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq f'_g(x_2). \quad (2.7)$$

Soit x un point où f n’est pas dérivable, trois cas peuvent se produire :

- on a : $f'_g(x) = -\infty$. Il existe au maximum un point $x \in I$ satisfaisant cette condition. En effet, si deux points x et y la satisfont, avec $x < y$, on a d’après le lemme, $f'_g(y) = -\infty$, et d’après la remarque ci-dessus,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = -\infty,$$

ce qui est absurde.

- on a : $f'_d(x) = +\infty$. De la même façon, il existe au maximum un point $x \in I$ satisfaisant cette condition.
- les dérivées à gauche et à droite sont finies mais différentes, i.e.

$$x \in \Delta = \{x \in I, -\infty < f'_g(x) < f'_d(x) < +\infty\}.$$

Considérons la famille

$$\{]f'_g(x), f'_d(x)[, x \in \Delta \}.$$

C’est une famille d’intervalles non vides, et disjoints d’après (2.7). Elle est donc au plus dénombrable. En effet, on peut construire une injection

$$\begin{aligned} \Delta &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto \min\{n \in \mathbb{N}, q_n \in]f'_g(x), f'_d(x)[\} \end{aligned}$$

où $\{q_n, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$. On en déduit que Δ , et donc l’ensemble des points de non-dérivabilité de f , sont au plus dénombrables.

2.4 Problèmes d’extrema

On s’extrait dans cette section du cadre des fonctions convexes (mais on y reviendra comme un cas particulier important) pour étudier des problèmes plus généraux de minimisation. X désigne un espace de Banach. K est une partie fermée non vide de X . On considère une fonction $J : K \rightarrow \mathbb{R}$, que l’on appelle “critère” ou “fonction-coût”.

Les questions que l’on se pose sont :

- J admet-elle un point de minimum sur K , i.e. existe-t-il

$$u \in K, t.q. J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$$

- si oui, ce point est-il unique? comment le caractériser?

2.4.1 Existence du minimum, sans hypothèse de convexité

Définition 2.4.1 La fonction J est dite coercive sur K si

$$\lim_{x \in K, \|x\| \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty,$$

i.e. l'une des conditions équivalentes ci-dessous est vérifiée :

1. $\forall A > 0, \exists r > 0, \forall x \in K, \|x\| > r \Rightarrow J(x) > A.$
2. $\forall (x_n) \in K^{\mathbb{N}}, \|x_n\| \rightarrow +\infty \Rightarrow J(x_n) \rightarrow +\infty.$

On a alors le résultat suivant, en dimension finie :

Théorème 2.4.1 – Soit K un fermé non vide de \mathbb{R}^N . Soit J une fonction coercive et semi-continue inférieurement sur K . Alors $\inf_K J$ existe et est atteint.

Preuve. – On montre d'abord que J est minorée. Soit $x_0 \in K$, d'après la coercivité de J , il existe $r > 0$ tel que

$$\|x\| \geq r \Rightarrow J(x) \geq J(x_0).$$

Il suffit donc de montrer que J est minorée sur le compact $K \cap \bar{B}(0, r)$. Supposons le contraire : alors il existe une suite (x_m) d'éléments de $K \cap \bar{B}(0, r)$, telle que $J(x_m) \rightarrow -\infty$. Par compacité, on peut en extraire une sous-suite convergant vers $\bar{x} \in K \cap \bar{B}(0, r)$. La semi-continuité inférieure de J permet de conclure

$$J(\bar{x}) \leq \liminf J(x_{n_k}) = -\infty,$$

ce qui est absurde. On a donc montré que J est minoré sur K .

Montrons maintenant que l'inf est atteint. Pour cela, on considère à nouveau une suite minimisante $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$. J étant coercive, on en déduit que la suite est bornée. Elle admet donc une sous-suite convergente et, comme ci-dessus, sa limite \bar{x} est un point de minimum pour J . \square

Remarque 2.4.1 Ce théorème est utilisé le plus souvent dans le cas d'une fonction J continue, ce qui est plus fort que sci. Cependant, l'hypothèse sci peut être utile dans la mesure où un sup de fonctions continues n'est pas nécessairement continue, mais reste sci.

Remarque 2.4.2 Ce résultat est faux en dimension infinie ! On peut citer le contre-exemple suivant (voir [8]). Soit $X = H^1(]0, 1[)$, muni de la norme

$$\|v\| = \left(\int_0^1 v^2(x) + v'^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

On définit sur X l'application J par

$$\forall v \in X, J(v) = \int_0^1 ((|v'(x)| - 1)^2 + v(x)^2) dx.$$

On montre que J est continue (donc semi-continue inférieurement), coercive, et satisfait

$$\forall v \in X, J(v) > 0, \quad \inf_{v \in X} J(v) = 0.$$

2.4.2 Existence du minimum - Cas convexe

Remarquons que la convexité ne suffit pas à garantir l'existence d'un minimum. En particulier,

- convexe $\not\Rightarrow$ minorée (ex : fonction linéaire)
- convexe minorée $\not\Rightarrow$ existence du min (ex : exp sur \mathbb{R})
- convexe minorée $\not\Rightarrow$ unicité du min (ex : fonction constante)

Lemme 2.4.2 -

1. Soit $X = \mathbb{R}^d$, K convexe fermé non vide de X . Soit $\alpha > 0$. Soit $J : K \rightarrow \mathbb{R}$, α -convexe. Alors

$$\exists \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in K, J(v) \geq \frac{\alpha}{8} \|v\|^2 + \beta.$$

2. Le même résultat reste vrai dans un espace de Banach, si la fonction J est supposée semi-continue inférieurement.

Preuve. - (voir [8]). On considère d'abord le cas de la dimension finie. Fixons $v_0 \in K$. Alors,

$$\forall v \in K, J\left(\frac{v_0 + v}{2}\right) \leq \frac{J(v) + J(v_0)}{2} - \frac{\alpha}{8} \|v - v_0\|^2$$

ce qui se réécrit sous la forme

$$J(v) \geq -J(v_0) + \frac{\alpha}{4} \|v - v_0\|^2 + 2J\left(\frac{v + v_0}{2}\right). \quad (2.8)$$

On va utiliser le lemme 2.3.6 : il existe une fonction affine qui minore J . L'idée est que cette fonction affine sera plus petite que le terme quadratique plus une constante. Ainsi,

$$\exists L \in X', \exists \gamma \in \mathbb{R}, \forall v \in K, J(v) \geq L(v) + \gamma.$$

Reprenant l'inégalité (2.8), on obtient alors

$$\forall v \in K, J(v) \geq -J(v_0) + \frac{\alpha}{4} \|v - v_0\|^2 + L(v + v_0) + 2\gamma.$$

D'autre part, on a

$$\|v - v_0\|^2 \geq | \|v\| - \|v_0\| |^2 = \|v\|^2 + \|v_0\|^2 - 2\|v\|\|v_0\|$$

et

$$L(v + v_0) = L(v) + L(v_0) \geq -c_1\|v\| + L(v_0),$$

où $c_1 = \|L\|$. Finalement, il vient

$$\forall v \in K, J(v) \geq -J(v_0) + \frac{\alpha}{4}\|v\|^2 - c_2\|v\| + c_3$$

où

$$c_2 = c_1 + \frac{\alpha}{2}\|v_0\|, \quad c_3 = \frac{\alpha}{4}\|v_0\|^2 + 2\gamma - J(v_0) + L(v_0).$$

Pour faire disparaître le terme $c_2\|v\|$, il reste à remarquer que

$$c_2\|v\| \leq \frac{\alpha}{8}\|v_0\|^2 + \frac{2c_2^2}{\alpha}.$$

Le résultat en découle directement.

En dimension infinie, la preuve est identique, mais l'existence d'une fonction affine qui minore J n'est pas toujours valable (il faut que l'épigraphe de J soit non dense). Le résultat reste vrai sous l'hypothèse supplémentaire : J semi-continue inférieurement, auquel cas son épigraphe est fermé donc non dense. \square

On peut enfin énoncer le théorème

Théorème 2.4.3 – Soit X un Banach, K un fermé convexe non vide de X et $J : K \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si J est strictement convexe sur K , alors elle a au plus un point de minimum sur K ;
2. si J est fortement convexe et semi-continue inférieurement, alors J a exactement un point de minimum $u \in K$, et on a

$$\forall v \in K, \|v - u\|^2 \leq \frac{4}{\alpha}(J(v) - J(u)).$$

Preuve. –

1. Soient u et v deux points de minimum. S'ils sont distincts alors par stricte convexité de J , on a

$$J\left(\frac{u+v}{2}\right) < J(u) = J(v) = \inf_{w \in K} J(w),$$

ce qui est absurde.

2. Dans le cas fortement convexe, l'unicité provient du 1). Il reste à montrer l'existence. D'après le lemme 2.4.2, J est minorée. Soient donc

$$m = \inf_{v \in K} J(v)$$

et soit (u_m) une suite minimisante. On montre que cette suite est de Cauchy. Pour cela, considérons $p, q \in \mathbb{N}$. On a :

$$J\left(\frac{u_p + u_q}{2}\right) \leq \frac{J(u_p) + J(u_q)}{2} - \frac{\alpha}{8} \|u_p - u_q\|^2.$$

Ainsi,

$$\|u_p - u_q\|^2 \leq \frac{4}{\alpha} \left(J(u_p) + J(u_q) - 2J\left(\frac{u_p + u_q}{2}\right) \right) \leq \frac{4}{\alpha} (J(u_p) + J(u_q) - 2m)$$

Le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 quand p, q tendent vers $+\infty$. X étant complet et K fermé, on en déduit l'existence d'une limite $u \in K$. Enfin, J étant semi-continue inférieurement, on a bien

$$J(u) \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} J(u_p) = \inf_K J.$$

Il reste à vérifier l'estimation d'erreur. Soit donc $v \in K$, on a :

$$J(u) \leq J\left(\frac{u + v}{2}\right) \leq \frac{J(u) + J(v)}{2} - \frac{\alpha}{8} \|u - v\|^2,$$

d'où il vient bien le résultat énoncé. □

Remarque 2.4.3 – *Le lecteur attentif aura remarqué la similitude entre cette preuve et celle du théorème de projection sur un convexe fermé non vide dans le cas hilbertien. En fait, le théorème de projection n'est autre qu'un cas particulier de ce théorème, pour la fonction J définie par*

$$J(v) = \|x - v\|^2, v \in K.$$

Dans le cas hilbertien, la norme est fortement convexe, donc ce théorème permet de retrouver l'existence et l'unicité du projeté. Dans le cas d'un Banach, la norme est convexe, mais pas nécessairement fortement convexe. On perd donc le théorème de projection.

2.4.3 Applications

1. Méthodes de gradient

Le théorème précédent et l'estimation d'erreur associée sont à la base de nombreux algorithmes d'optimisation, en particulier des méthodes de gradient. L'idée est la

suivante : pour approcher numériquement le minimum d'une fonction J supposée différentiable et fortement convexe, on initialise l'algorithme avec une valeur u_0 quelconque, et on définit la suite u_n par

$$u_{n+1} = u_n - \mu_n \nabla J(u_n),$$

où μ_n est le pas de la descente, qui peut soit être constant pour tout n (gradient à pas constant) soit être optimisé à chaque étape pour accélérer la descente (gradient à pas optimal). On obtient la convergence de l'algorithme de gradient à pas optimal dans le cas fortement convexe. Cette méthode est en particulier très employée pour résoudre des systèmes linéaires à matrice symétrique définie positive.

2. Le problème des ellipsoïdes de John-Loewner

Soit \mathcal{K} un compact d'intérieur non vide de \mathbb{R}^d . On cherche s'il existe un ellipsoïde de volume minimal contenant \mathcal{K} .

A un changement d'origine près, un ellipsoïde est de la forme

$$E_A = \{x \in \mathbb{R}^d, (Ax, x) \leq 1\}, \quad A \in \mathcal{S}_d^{++}. \quad (2.9)$$

En diagonalisant A dans une base orthonormée, on montre que le volume de E_A est

$$V(E_A) = c_d (\det A)^{-1/2},$$

où c_d est une constante ne dépendant que de la dimension d . Le volume étant positif, il est équivalent de minimiser son carré. On peut (mais c'est long...!) montrer le théorème

Théorème 2.4.4 – *Il existe un unique ellipsoïde E_A de volume minimal contenant \mathcal{K} parmi les ellipsoïdes de la forme (2.9).*

L'existence repose ici sur des arguments de continuité et compacité (on ne les détaille pas ici). En fait, le problème se reformule ainsi : minimiser la fonction

$$J : \begin{cases} K & \rightarrow \mathbb{R} \\ A & \mapsto (\det A)^{-1} \end{cases},$$

où K est défini par

$$K = \{A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R}), t.q. \mathcal{K} \subset E_A\} = \{A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R}), t.q. \forall x \in \mathcal{K}, (Ax, x) \leq 1\}.$$

L'unicité provient de la stricte convexité de l'application J . Il en découle qu'il y a au plus un point de minimum sur K .

Proposition 2.4.5 – *L'application $A \mapsto (\det A)^{-1}$ est strictement convexe sur \mathcal{S}_d^{++} .*

La preuve repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.4.6 – *Soit P polynôme à coefficients réels, et scindé sur \mathbb{R} , vérifiant : $P > 0$ sur $[0, 1]$. Alors $1/P$ est fortement convexe sur $[0, 1]$.*

Preuve. – On note $P(X) = a \prod_{i=1}^n (X - x_i)^{\alpha_i}$, avec $\alpha_i > 0, x_i \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{X - x_i} \text{ donc } \left(\frac{P'}{P}\right)' = - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(X - x_i)^2} < 0.$$

Or

$$\left(\frac{1}{P}\right)'' = - \left(\frac{P'}{P^2}\right)' = -\frac{1}{P} \left(\frac{P'}{P}\right)' + \frac{P'^2}{P^3} > 0.$$

Notons $\alpha = \min_{t \in [0,1]} \left(\frac{1}{P}\right)''(t)$, alors $1/P$ est α -convexe sur $[0, 1]$. □

Montrons maintenant la proposition.

Soient $M, N \in \mathcal{S}_d^{++}$, $M \neq N$; on pose

$$P(t) = \det(tM + (1 - t)N), t \in [0, 1].$$

Il est clair que P est un polynôme à coefficients réels et que $P(t) > 0, t \in [0, 1]$. Vérifions que P est à racines réelles.

Soit $t \in \mathbb{C}$ une racine de P , alors

$$\det\left(I + \frac{1-t}{t}M^{-1}N\right) = 0,$$

donc $\lambda = \frac{-t}{1-t}$ est une valeur propre de $M^{-1}N$. Soit $X \neq 0$ un vecteur propre associé :

$$M^{-1}NX = \lambda X$$

Alors

$$(M^{-1}NX, NX) = \lambda(X, NX),$$

les produits scalaires étant positifs strictement. Donc $\lambda > 0$. On a aussi $\lambda \neq 1$ donc

$$t = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \in \mathbb{R}.$$

D'après le lemme, $1/P$ est fortement convexe sur $[0, 1]$, donc $1/\det$ est strictement convexe (mais pas fortement, la constante α dépendant de M et N). □

2.4.4 Caractérisation du minimum - Cas "sans contrainte"

On parle de minimisation sans contrainte lorsqu'on minimise une fonction sur l'espace entier. (Si on minimise sur une partie C stricte de X , on impose sur le minimiseur une certaine contrainte, qui est d'appartenir à C .)

Une condition nécessaire bien connue, dans le cas où J est différentiable, est que le point de minimum est un point critique, i.e. annule la différentielle. On montre que dans le cas convexe, cette condition est suffisante.

Théorème 2.4.7 – *On suppose ici que $C = X$. Soit J convexe sur X , et $x_0 \in X$. Alors*

1. x_0 minimum local de $J \iff x_0$ minimum global de J
 $\iff \forall v \in X, J'(x; v) \in [0, +\infty]$.
2. l'ensemble des points de minimum est un convexe (éventuellement vide);
3. si de plus, J est différentiable en x_0 , alors x_0 minimum local de $J \iff DJ(x_0) = 0$.

Preuve. –

1. Il est clair que x_0 minimum global de $J \Rightarrow x_0$ minimum local de $J \Rightarrow \forall v \in X, J'(x; v) \in [0, +\infty]$. Supposons maintenant que $\forall v \in X, J'(x; v) \in [0, +\infty]$. Soit $x \in X$, alors en posant $v = x - x_0$, on a

$$0 \leq J'(x_0; v) = \inf_{t>0} \frac{J(x_0 + tv) - J(x_0)}{t} \leq J(x_0 + v) - J(x_0).$$

On en déduit $J(x) \geq J(x_0)$, pour tout $x \in X$, donc x_0 est un point de minimum global.

2. Le point 2 est immédiat.
3. Supposons J différentiable en x_0 , point de minimum local; alors pour tout $v \in X$, $J'(x_0; v) = DJ(x_0)v \geq 0$. En changeant v en $-v$ on a bien le résultat voulu. La réciproque est immédiate. □

Le fait de pouvoir caractériser le point de minimum par l'annulation de la dérivée a des applications importantes. On peut citer par exemple, dans le domaine des équations aux dérivées partielles, l'équivalence entre l'équation et la minimisation d'une énergie. Ainsi, pour l'équation de Laplace avec conditions au bord de Dirichlet sur un ouvert Ω borné et régulier,

$$\Delta u(x) = 0, x \in \Omega, \quad u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \tag{2.10}$$

$u \in H_0^1(\Omega) = X$ est solution de (2.10) au sens des distributions si et seulement si elle minimise la fonction

$$J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

En effet, on vérifie que J est différentiable, de différentielle

$$DJ(v).h = 2 \int_{\Omega} \langle \nabla v(x), \nabla h(x) \rangle dx.$$

On a de plus, pour tout $v, h \in X$,

$$J(v+h) \geq J(v) + DJ(v).h,$$

donc J est convexe. Ainsi, $u \in X$ est un point de minimum de J si et seulement si $DJ(u) = 0$.

$$DJ(u) = 0 \iff \forall h \in X, \int_{\Omega} \langle \nabla v(x), \nabla h(x) \rangle dx = 0.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$DJ(u) = 0 \iff \forall h \in X, \int_{\Omega} \Delta u(x) h(x) dx = 0 \iff \Delta u(x) = 0 \text{ pp sur } \Omega.$$

2.4.5 Minimisation sous contraintes d'inégalité/égalité

On considère maintenant le cas très fréquent où on doit minimiser une fonction J sur un sous-ensemble strict K de $X = \mathbb{R}^N$. On se limitera au cas où K est de la forme

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N, g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p\}.$$

et où $J, g_i, 1 \leq i \leq m, h_j, 1 \leq j \leq p$ sont de classe C^1 . On parle alors de minimisation sous contraintes d'égalité/inégalité. Remarquons aussi que toute contrainte d'égalité $h_j(x) = 0$ peut être remplacée par les deux contraintes d'inégalité $h_j(x) \leq 0, h_j(x) \geq 0$.

Lorsqu'on ne suppose pas d'hypothèse de convexité sur les fonctions, on a une condition nécessaire d'extrémum local, appelée condition de Fritz John.

Théorème 2.4.8 (*Condition nécessaire de Fritz John, 1948*). –

Soit $\bar{x} \in K$ un minimum local de J sur K . Alors on a

$$\exists \lambda_0 = 0 \text{ ou } 1, \exists \gamma_i \geq 0, 1 \leq i \leq m, \exists \lambda_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq p, \text{ tels que}$$

$$\nabla \left(\lambda_0 J + \sum \gamma_i g_i + \sum \lambda_j h_j \right) (\bar{x}) = 0, \quad (2.11)$$

$$(\lambda_0, \gamma, \lambda) \neq 0, \quad (2.12)$$

$$\sum \gamma_i g_i(\bar{x}) = 0. \quad (2.13)$$

Remarques :

1. Dans le cas où les gradients des contraintes au point \bar{x} sont liés, on peut prendre $\lambda_0 = 0$: c'est le cas dit "anormal" ou "singulier". A l'inverse, si les gradients des contraintes sont tous linéairement indépendants au point \bar{x} (cas "normal" ou "régulier"), alors nécessairement $\lambda_0 \neq 0$, et on retrouve (dans le cas des contraintes d'égalité) le théorème des extréma liés. Les coefficients λ_j, γ_i sont alors appelés multiplicateurs de Lagrange.

2. La condition $\sum \gamma_i g_i(\bar{x}) = 0$ est appelée condition d'écart. Notons que, les γ_i étant des multiplicateurs positifs ou nuls, et les $g_i(\bar{x})$ étant négatifs ou nuls, cette condition est équivalente à

$$\forall i = 1, \dots, \gamma_i g_i(\bar{x}) = 0.$$

Autrement dit, on n'a pas besoin de prendre un multiplicateur de Lagrange lorsque la contrainte g_i n'est pas à l'égalité. (On dit alors que la contrainte n'est pas active ou pas saturée.)

3. Le résultat admet des généralisations lorsque X est un Hilbert, voir par exemple [8]. On l'énonce en général sous une hypothèse supplémentaire, dite de « contraintes qualifiées en \bar{x} », qui permet d'écarter le cas anormal. La preuve repose alors sur le lemme de Farkas-Minkowski (voir théorème 1.5.7 page 33).

Preuve. – La preuve proposée ici est valable seulement en dimension finie ($X = \mathbb{R}^N$), mais a l'avantage d'être élémentaire.

Pour simplifier, on suppose que $m = p = 1$. La preuve repose sur une pénalisation de la fonction coût J . Soit \bar{x} un minimum local de J sur K . On a donc :

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \in K \cap \bar{B}(\bar{x}, \epsilon), J(x) \geq J(\bar{x}).$$

On va définir des fonctionnelles pénalisées $\varphi_k, k \in \mathbb{N}^*$ sur $\bar{B}(\bar{x}, \epsilon)$ par

$$\varphi_k(x) = J(x) + \|x - \bar{x}\|^2 + k g_+^2(x) + k \|h(x)\|^2,$$

où $g_+(x) = \max(g(x), 0)$. Par compacité de la boule et continuité de φ_k , il existe $x_k \in \bar{B}(\bar{x}, \epsilon)$ point de minimum global de φ_k . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite (x_k) converge vers une limite $x_\infty \in \bar{B}(\bar{x}, \epsilon)$. La preuve consiste en trois étapes :

1. montrer que $x_\infty = \bar{x}$;
2. écrire la condition nécessaire d'optimalité pour x_k ,
3. passer à la limite $k \rightarrow +\infty$.

Vérifions donc ces trois points.

1. Pour la première étape, on va montrer que $x_\infty \in K$ et que $J(x_\infty) + \|x_\infty - \bar{x}\|^2 \leq J(\bar{x})$. Cette inégalité s'obtient en écrivant :

$$\forall k \geq 1, J(x_k) + \|x_k - \bar{x}\|^2 \leq \varphi_k(x_k) \leq \varphi_k(\bar{x}) = J(\bar{x})$$

(la deuxième inégalité vient du fait que x_k est un minimiseur de φ_k sur la boule, et l'égalité est vraie car $\bar{x} \in K$) et en passant à la limite quand $x \rightarrow +\infty$. Il reste à vérifier que $x_\infty \in K$, i.e. $h(x_\infty) = 0$ et $g_+(x_\infty) = 0$. Pour cela, rappelons

$$\begin{aligned} \varphi_k(x_k) &\leq \varphi_k(\bar{x}) = J(\bar{x}) \\ J(x_k) + \|x_k - \bar{x}\|^2 + k g_+^2(x_k) + k \|h(x_k)\|^2 &\leq J(\bar{x}) \\ k (g_+^2(x_k) + \|h(x_k)\|^2) &\leq J(\bar{x}) - \min_{x \in \bar{B}(\bar{x}, \epsilon)} J(x) = M \end{aligned}$$

où M est une constante indépendante de k . En faisant tendre k vers $+\infty$, il vient

$$g_+^2(x_\infty) + \|h(x_\infty)\|^2 = 0, \quad i.e. \quad x_\infty \in K.$$

Maintenant, si $\bar{x} \neq x_\infty$, on en déduit

$$J(x_\infty) < \inf_{x \in K} J(x),$$

ce qui est absurde car $x_\infty \in K$. Donc $\bar{x} = x_\infty$.

2. On vient de montrer que x_k tend vers \bar{x} quand $k \rightarrow +\infty$, donc pour k assez grand, x_k est dans la boule *ouverte* $B(\bar{x}, \epsilon)$. Alors, on peut appliquer la condition nécessaire usuelle de minimalité et on a : $\nabla \varphi_k(x_k) = 0$, qui se réécrit

$$\nabla J(x_k) + 2(x_k - \bar{x}) + 2kg_+(x_k)\nabla g(x_k) + 2kh(x_k)\nabla h(x_k) = 0. \quad (2.14)$$

Posons

$$\gamma_k = 2kg_+(x_k) \geq 0, \quad \lambda_k = 2kh(x_k).$$

3. On veut maintenant passer à la limite $k \rightarrow +\infty$. Deux cas se présentent :

- (a) si les suites (γ_k) et (λ_k) sont bornées : alors on peut extraire des sous-suites convergentes, de limites respectives $\gamma \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$. A la limite, on vérifie bien la condition d'optimalité (2.11) avec $\lambda_0 = 1$. On est dans le cas *normal* et (2.12) est bien vérifiée. De plus, si $g(\bar{x}) < 0$, alors $g(x_k) < 0$ pour k assez grand, et donc $\gamma = 0$. Ainsi, la condition (2.13) est satisfaite.
- (b) si l'une des suites (γ_k) et (λ_k) est non bornée : à une sous-suite près, on a

$$|\gamma_k| + |\lambda_k| \rightarrow +\infty.$$

Divisons l'égalité (2.14) par $|\gamma_k| + |\lambda_k|$, et faisons tendre k vers $+\infty$; on obtient à la limite :

$$0 = \gamma \nabla g(\bar{x}) + \lambda \nabla h(\bar{x}),$$

où

$$(\gamma, \lambda) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{\gamma_k}{|\gamma_k| + |\lambda_k|}, \frac{\lambda_k}{|\gamma_k| + |\lambda_k|} \right)$$

satisfait :

$$|\gamma| + |\lambda| = 1, \quad \gamma \geq 0.$$

Ainsi, (2.11) et (2.12) sont bien vérifiées avec $\lambda_0 = 0$ (cas *anormal*). On vérifie (2.13) de la même façon que dans le cas normal. □

2.4.6 Condition d'optimalité - cas de contraintes convexes

Comme pour la minimisation sans contrainte, où la condition nécessaire devient nécessaire et suffisante lorsque la fonction coût est convexe, les conditions de Fritz John sont également suffisantes dans le cas où la fonction coût et les contraintes sont convexes. C'est le théorème de Karush, Kuhn et Tucker, publié par Tucker et son thésard Kuhn en 1951, mais montré indépendamment en 1948 par W. Karush dans un mémoire de maîtrise qui n'avait pas été publié...

L'énoncé habituel du théorème est le suivant (voir par exemple [8]).

Théorème 2.4.9 (Karush, Kuhn, Tucker) –

Soient J, g_1, \dots, g_m des fonctions convexes continues sur un Hilbert X , dérivables sur

$$K = \{v \in X, g_i(v) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

Soit $u \in K$ tel que les contraintes sont qualifiées en u . Alors u est un minimum global de J sur K si et seulement si il existe $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in (\mathbb{R}^+)^m$ tel que

$$\nabla J(u) + \sum_{i=1}^m \gamma_i \nabla g_i(u) = 0, \quad \sum_{i=1}^m \gamma_i g_i(u) = 0.$$

N'ayant pas défini la notion de contraintes qualifiées, nous allons énoncer le théorème sous une forme un peu différente, en nous restreignant à la dimension finie.

Théorème 2.4.10 (Karush, Kuhn, Tucker) –

Soient J, g_1, \dots, g_m des fonctions convexes sur \mathbb{R}^N . On note

$$K = \{v \in X, g_i(v) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

On définit une fonction \mathcal{L} , appelée lagrangien, sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{L}(x, \gamma, \lambda_0) = \lambda_0 J(x) + \sum_{i=1}^m \gamma_i g_i(x).$$

Soit $u \in K$. On a les propriétés suivantes :

1. Si u est un minimum global de J sur K , alors il existe des multiplicateurs (λ_0, γ) tels que
 - (a) u est point de minimum global de la fonction $\mathcal{L}(\cdot, \gamma, \lambda_0)$ sur X ,
 - (b) $\gamma_i \geq 0, 1 \leq i \leq m, \lambda_0 = 0$ ou 1 ;
 - (c) $\gamma_i g_i(u) = 0, 1 \leq i \leq m$.
2. Si $\lambda_0 \neq 0$, les trois conditions ci-dessus sont suffisantes pour que u soit point de minimum global de J sur K ;
3. s'il existe $x \in X$ satisfaisant : $g_i(x) < 0, 1 \leq i \leq m$, alors on peut prendre $\lambda_0 = 1$.

QUELQUES GRANDS NOMS DE L'ANALYSE CONVEXE

J. Jensen	1859-1925	danois, expert dans une compagnie téléphonique, connu principalement pour l'inégalité intégrale qui porte son nom ;
Minkowski	1864-1909	allemand, auteur de résultats sur la convexité en dimension finie, notamment le théorème sur l'enveloppe convexe des points extrémaux.
W. Fenchel	1905-1988	danois d'origine allemande, privilégie une approche géométrique ; auteur avec JJ. Moreau de la notion de fonction conjuguée (conjuguée de Fenchel-Moreau)
JJ Moreau	1923-	mécanicien et mathématicien français, voir Fenchel
L. Kantorovitch	1912-1986	mathématicien russe, lauréat en 1975 (avec T. Koopmans) du Prix Nobel d'économie, il est considéré comme un des fondateurs de la programmation linéaire en optimisation.
Fritz John		en s'intéressant au problème de maximisation du volume d'un ellipsoïde contenu dans un convexe donné (problème des ellipsoïdes de John), il énonce des conditions nécessaires pour la minimisation sous contrainte, connues sous le nom de conditions de Fritz John.
A.W. Tucker et son élève K. Kuhn		connus pour le théorème dit de Kuhn-Tucker (1951) qui énonce des conditions nécessaires de minimum pour l'optimisation sous contrainte. En fait, ce théorème avait déjà été démontré indépendamment par W. Karush, russe, à l'occasion de son mémoire de maîtrise en 1948 !
R.T. Rockafellar	1935-	mathématicien américain, inventeur de la notion de problème dual en optimisation convexe.