Graphes, formule d'Euler et solides de Platon

B. Meyer

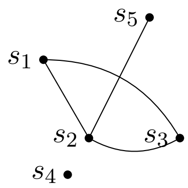
Niveau : Terminale
Difficulté : ★★
Durée : 2 heures
Rubrique(s) : Algèbre (graphes), Géométrie, Logique (récurrence).

Dans cet atelier, vous allez découvrir un objet mathématique dénommé graphe. En fait vous en connaissez déjà certains un peu particuliers : les arbres de probabilité.

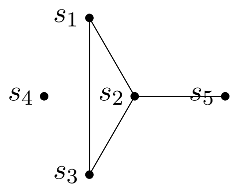
La petite histoire...
Francky aime beaucoup jouer au foot. Zahide préfèrerait qu'il passe plus de temps à repasser ses leçons de mathématiques. Un soir, pour le mettre au travail, elle le défie de construire un ballon de foot avec deux fois plus de pentagones qu'un ballon de foot du commerce. Francky sera-t-il assez malin pour y parvenir ?

Monsieur et Madame,
Aijmaiscombienilyadefacesdansundodécaèdre ont un fils...

Un graphe est un ensemble de noeuds dont certains sont reliés deux à deux. Par exemple, soit G le graphe défini par cinq sommets $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ et quatre arêtes $A = \{\{s_1, s_2\}, \{s_1, s_3\}, \{s_2, s_3\}, \{s_2, s_5\}\}$.
Un graphe admet des *représentations graphiques* : on représente les sommets par des points et les arêtes par des lignes (éventuellement courbes) les rejoignant. Avec le même exemple, voici différentes représentations du même graphe.

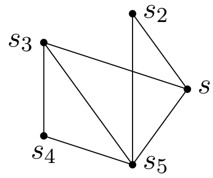


ou

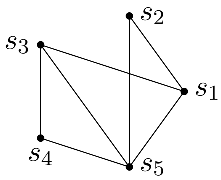


Ainsi on remarque qu'un graphe peut être dessiné de plusieurs façons, ce qui importe est le nom des sommets (placés comme on le désire) et de surtout de relier les sommets selon la liste des arêtes.

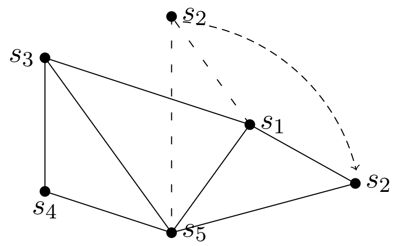
Plus formellement, on appelle *graphe* tout couple $G = (S, A)$ tel que $A \subseteq \{\{a, b\}, a, b \in S^2; a \neq b\}$. Les éléments de S s'appellent les *sommets* et les éléments de A les *arêtes*. Notez bien que la définition de graphe ne présume pas de la manière de le dessiner.
Le graphe dessiné en exemple possède deux composantes : quelle que soit la façon de le représenter, les sommets s_1, s_2, s_3 et s_5 sont reliés entre eux et le sommet s_4 est tout seul. On dit qu'un graphe est *connexe* quand n'importe quel couple de sommets est connecté par une suite d'arêtes. Le graphe ci-dessous est connexe.



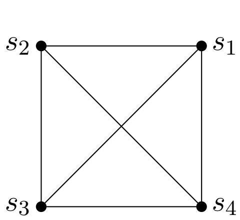
On dit qu'un graphe est *planaire* s'il est possible de le dessiner dans le plan sans que deux arêtes ne se coupent en dehors des sommets (en choisissant de placer les points à notre convenance). Un graphe peut paraître non planaire, comme dans le dessin du graphe du dernier exemple, mais en plaçant différemment les sommets, on se rend compte qu'il est planaire.



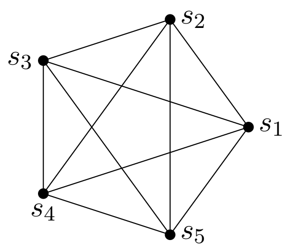
devient



Exercice 1 (Ça plane pour moi).
Pour chacun des graphes representé ci-dessous, dire si le graphe est planaire ou non.



et



Quand un graphe est planaire, on peut alors parler de *faces* : ce sont les domaines du plan délimités par les arêtes. Exemple (figure 1) : les graphes suivants sont planaires et possèdent respectivement 4, 2 et 1 faces (il ne faut pas oublier la face extérieure, ici coloriée en gris clair).

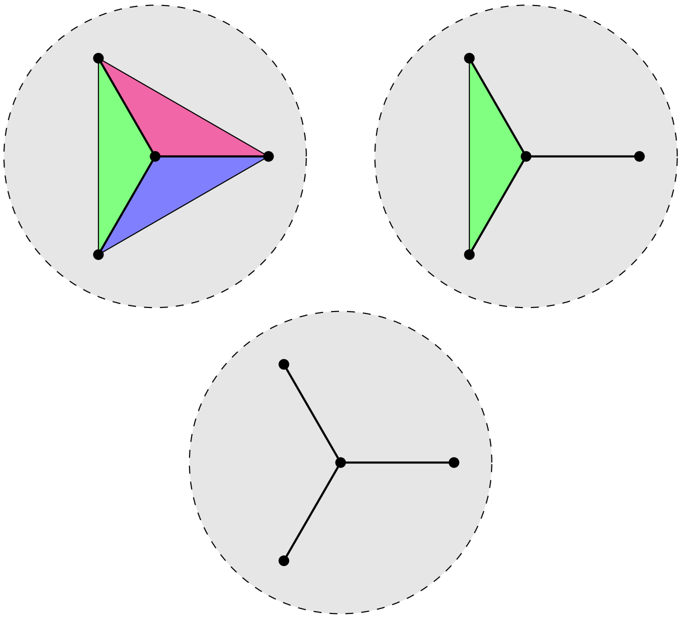


FIGURE 1 – Quelques graphes à quatre sommets

On dit qu'un graphe G est un *arbre* s'il est connexe et ne possède pas de cycle, c'est-à-dire une suite d'arêtes distinctes se refermant sur elle-même. Parmi les trois graphes de la figure 1, seul le plus à droite est un arbre.

Exercice 2 (Combien d'arêtes dans un arbre ?).
Soit $G = (S, A)$ un arbre comptant s sommets et a arêtes.

1. Le graphe G est-il planaire ? Combien de faces G possède-t-il ?

2. Montrer que $a = s - 1$.

Exercice 3 (Formule d'Euler).
Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe planaire comptant f faces, a arêtes et s sommets. Nous allons démontrer que

$$f - a + s = 2, \tag{1}$$

égalité appelée *formule d'Euler*.

1. Vérifier la formule d'Euler sur les trois exemples de la figure 1.

2. Montrer la formule d'Euler quand G est un arbre.

3. Soit G un graphe planaire connexe possédant un cycle et comptant a arêtes. On suppose que la formule d'Euler est vérifiée pour tout graphe possédant un nombre d'arêtes strictement inférieur à a. Montrer que la formule d'Euler s'applique à G.

4. Conclure.

Commentaires sur l'Exercice 3

De façon surprenante, si l'on dessinait nos graphes sur un beignet à g trous, on remarquerait que $f-a+s$ est toujours constant et ne dépend que de g, via la formule $f-a+s=2-2g$. On parle d'*invariant topologique*. Le nombre $f-a+s$ ne dépend que de la forme ou de la structure de l'objet (ici le beignet) sur lequel nous dessinons le graphe, indépendamment par exemple de la façon dont l'objet est courbé ou déformé. Le nombre $f-a+s$ s'appelle la *caractéristique d'Euler*.

Exercice 4 (Solides de Platon).
Un solide régulier est un polyèdre convexe dont toutes les faces sont identiques à un même polygone régulier et autant de faces se rencontrent à chaque sommet. Nous allons montrer qu'il n'en existe que 5 : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

1. Pour chacun des polyèdres cités ci-dessus, donner le nombre de faces, d'arêtes et de sommets.

2. Soit S un solide régulier comptant s sommets, a arêtes et f faces, avec $k \geq 3$ arêtes par face et $d \geq 3$ arêtes se rencontrant en chaque sommet. Montrer que

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a}. \tag{2}$$

3. Montrer que l'équation (2) n'admet que 5 solutions entières possibles.

4. Conclure

Commentaires sur l'Exercice 4

Même si des modèles de ces solides ont été construits un millier d'années avant Platon par des peuplades néolithiques écossaises, ces solides doivent leur nom à leur emploi par Platon dans le dialogue *Timée* (env 358 av. J.-C.). On ne sait pas exactement quand les Grecs ont découverts ces différents solides. Certains pensent que Pythagore (vers 530 av. J.-C.) les connaissait ; d'autres estiment que seuls le tétraèdre, le cube et le dodécaèdre lui étaient familiers et que l'on doit l'octaèdre et l'icosaèdre à Théétète d'Athènes, un contemporain de Platon. Les cinq solides ont été étudiés par Euclide (env 300 av. J.-C.) dans ses *Éléments* (en particulier dans le *Livre XIII*).

Exercice 5 (Ballon de foot pentagonal. . .).

Un ballon de football est formé de pièces de cuir pentagonales et hexagonales.

1. Montrer que seules trois pièces se rencontrent au sommet et que l'une d'entre elle (au moins) est un pentagone.

2. Soit p le nombre de pentagones et h le nombre d'hexagones du ballon. Combien y a-t-il de faces, d'arêtes et de sommets sur le ballon ?

3. Montrer qu'il y a nécessairement 12 pentagones.

4. Combien d'hexagones peut-il y avoir au plus sur un ballon de football ?

Commentaires sur l'Exercice 5

Un ballon de football doit être aussi sphérique que possible, c'est pourquoi nous nous intéressons à un solide comptant le plus de faces possibles.

Le résultat discuté dans cet exercice s'applique aussi en chimie, pour déterminer la structure des *fullerènes*, qui sont des assemblages de molécules de carbone formés de 12 pentagones et $(2n-20)/2$ hexagones.

Indications

Indications sur l'Exercice 1

Redessiner les graphes en déplaçant les sommets.

Indications sur l'Exercice 2

2. On peut raisonner par récurrence sur s et décomposer un graphe en deux sous-graphes par la suppression d'une arête arbitrairement choisie.

Indications sur l'Exercice 3

3. Considérer une arête participant à un cycle de G et envisager ce qu'il advient quand on la supprime.

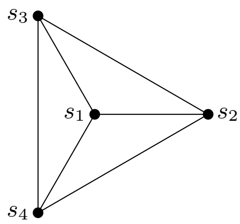
Indications sur l'Exercice 4

2. Observer que le graphe formé par les sommets et les arêtes de S, en quelque sorte son squelette, est planaire. Pour la question 3, commencer par noter que $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}$.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. Le premier graphe est planaire car il peut être redessiné comme suit :



2. Le second graphe n'est pas planaire, ce qui est plus difficile à montrer. En effet, il faut justifier que quelle que soit la manière dont on dessine les sommets, deux arêtes au moins vont se couper. Or le graphe que nous voulons redessiner est le graphe à cinq sommets dont tous les sommets sont reliés entre eux. Essayons de le construire en ajoutant un sommet après l'autre. Avec les trois premiers sommets, on forme un triangle. En rajoutant le quatrième sommet, qu'il se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du sommet déjà construit, on aboutit, à déformation près, au dessin de la question 1. Enfin, en rajoutant un cinquième sommet au dessin de la question 1, on remarque que, où qu'il soit placé parmi les quatre zones délimitées possibles, une des arêtes créées coupera une arête existante. Donc le second graphe n'est pas planaire. □

Correction de l'Exercice 2

1. Le graphe G est planaire, car on peut choisir un sommet quelconque de G, disposer ses voisins sur un cercle autour de ce sommet à angles égaux et répéter le processus au départ des voisins avec les arêtes restantes en réduisant les angles entre les arêtes au fur et à mesure. Tous les sommets seront dessinés car le graphe est connexe. L'algorithme fonctionne car il n'y a pas de cycles, donc pas de risque de dessiner un sommet plusieurs fois.

Le graphe n'a qu'une seule face : la face extérieure.

2. On raisonne par récurrence sur le nombre de sommets s.

Cas initial : S'il n'y a qu'un sommet, il n'y a pas d'arête, donc $a = s - 1 = 0$.

Hérédité : Soit $s \geq 1$ et supposons que pour tout graphe comptant $s' \leq s$ sommets et a' arêtes, on a $a' = s' - 1$. Soit un graphe G à $s + 1$ sommets. Dans le graphe G, on supprime une arête choisie arbitrairement. Le graphe resultant n'est plus connexe, sans quoi rajouter l'arête que l'on vient de supprimer créerait un cycle. Nous obtenons donc deux sous-graphes, qui sont bien des arbres, comptant disons s_1 et s_2 sommets avec $s_1, s_2 \leq s$ et $s_1 + s_2 = s + 1$. Mais alors, par hypothèse de récurrence, $a_1 = s_1 - 1$, $a_2 = s_2 - 1$, en appelant a_1, a_2 leur nombre d'arêtes. Donc $s+1 = s_1+s_2 = a_1+a_2+2$. Or $a = 1+a_1+a_2$. D'où $a = (s+1)-1$ comme souhaité, ce qui achève la récurrence. $\square$

Correction de l'Exercice 3

1. Dans le premier exemple, on a $s-a+f = 4-6+4 = 2$; dans le deuxième, $s-a+f = 4-4+2 = 2$; dans le troisième, $s-a+f = 4-3+1 = 2$. La formule fonctionne dans les trois cas.

2. Quand G est un arbre, d'après l'exercice précédent, on a $a = s-1$ et il n'y a qu'une face. Donc $f-a+s = 1-(s-1)+s = 2$.

3. On sélectionne une arête participant à un cycle de G et on la supprime. Comme elle provient d'un cycle, le graphe reste connexe (car dans tout chemin, on peut remplacer l'arête supprimée par le parcours restant du cycle). De plus, le nouveau graphe possède le même nombre de sommets, une arête et une face en moins. Donc par hypothèse, $s-(a-1)+(f-1) = 2$, autrement dit $s-a+f = 2$, ce qu'il fallait démontrer.

4. Pour démontrer la formule d'Euler dans le cas général, on peut raisonner par récurrence sur le nombre d'arêtes a. Le cas initial ($a = 1$) est un arbre, donc la formule s'applique. Pour la propriété d'hérédité, on distingue deux cas : soit le graphe est un arbre, soit il possède un cycle. Les questions précédentes traitent de ces deux cas. $\square$

Correction de l'Exercice 4

1. On a

Solide	Faces	Arêtes	Sommets	Arêtes par face	Arêtes par sommet
Tétraèdre	4	6	4	3 (triangulaire)	3
Cube	6	12	8	4 (carrée)	3
Octaèdre	8	12	6	3 (triangulaire)	4
Dodecaèdre	12	30	20	5 (pentagonale)	3
Icosaèdre	20	30	12	3 (triangulaire)	5

2. Le graphe formé par les sommets et les arêtes du solide S (son squelette) est planaire. Pour s'en apercevoir, on écartèle la face du fond, puis on écrase le solide sur cette face. D'après la formule d'Euler,

$$s-a+f = 2.$$

Comme il y a k arêtes par faces et que chaque arête appartient à deux faces, $kf = 2a$. De même, il a d arêtes par sommet et chaque arête appartient à deux sommets, donc $ds = 2a$. En substituant,

$$\frac{2a}{d} - a + \frac{2a}{k} = 2$$

ce qui équivaut à

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a}.$$

3. Comme $a > 0$, on a $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}$. Si $d \geq 6$, comme il faut que $k \geq 3$ et comme la suite $k \mapsto \frac{1}{k}$ est décroissante, il suffit de noter que $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$ pour exclure toute solution. Pour $d = 5$, on peut avoir $k = 3$, ce qui donne $a = 30$; par contre si $k \geq 4$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$. Pour $d = 4$, on peut avoir $k = 3$, ce qui donne $a = 12$; par contre si $k \geq 4$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$. Pour $d = 3$, on peut avoir $k = 3$ avec $a = 6$, $k = 4$ avec $a = 12$ ou $k = 5$ avec $a = 30$; par contre si $k \geq 6$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$.

4. Si on résume, les valeurs possibles de (k, d) coïncident avec les valeurs des cinq solides de Platon. Il n'y a donc pas d'autre solide régulier. $\square$

Correction de l'Exercice 5

1. L'angle entre deux côtés d'une face d'un polygone régulier à n faces est $\pi - \frac{2\pi}{n}$. Pour des hexagones ou des pentagones, il est d'au moins $\frac{3\pi}{5}$. Pour pouvoir assembler correctement p pièces, il faut que la somme de leurs angles soit inférieure à 2π, autrement dit, $\frac{3p\pi}{5} \leq 2\pi$, donc $p \leq 3$ (p est entier). Moins de deux pièces ne convient pas non plus. Il y a donc toujours 3 pièces par sommet. On peut même noter que tout sommet doit comporter au moins un pentagone, sinon il serait plat (car $2\pi = 3\frac{2\pi}{3}$).

2. Il y a $f = p + h$ faces. Chaque arête apparait sur deux faces et il y en a 5 par pentagone ou 6 par hexagone. Donc il y a $a = (5p + 6h)/2$ arêtes. Chaque sommet appartient à 3 faces et il y en a 5 par pentagone ou 6 par hexagone. Donc il y a $s = (5p + 6h)/3$ sommets.

3. La formule d'Euler permet d'écrire que $f - a + s = 2$.
Or $f - a + s = p + h - (5p + 6h)/2 + (5p + 6h)/3 = \frac{1}{6}p$. Donc $p = 12$.

4. On a vu que chaque sommet doit appartenir à au moins un pentagone : il y a donc $5 \cdot 12$ sommets au plus. Comme $s = (5p + 6h)/3$, il y aurait dans ce cas $h = 20$ hexagones. En réalité, il y a bien 12 pentagones et 20 hexagones sur un ballon de football, mais on pourrait en avoir moins : par exemple le dodecadèdre compte 0 hexagones (mais il est moins sphérique). $\square$

