# Relations de couples

B. Meyer

**Niveau :** Terminale
**Difficulté :** ★★ (trois premiers exercices), ★★★ (le dernier exercice est « stellaire ».)
**Durée :** 3-4h
**Rubrique(s) :** Théorie des ensembles (relation d'équivalence, relation d'ordre, graphe), Topologie (minorant, élément minimal) .

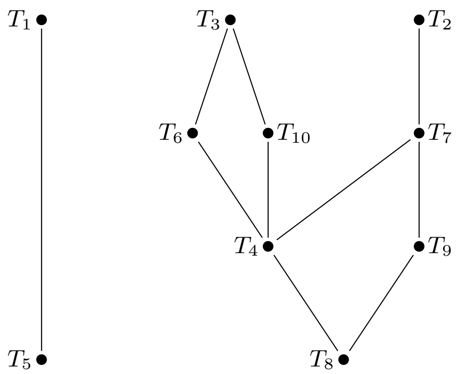
---

*Dans le secondaire, vous avez manipulé les symboles $=$, $\leq$ pour démontrer des propriétés sur les nombres réels. Dans cet atelier vous allez étendre la signification de ces symboles et prendre de la hauteur.*

**La petite histoire...**
Pitoh, légendaire Shah de la Perse antique, souhaite se faire construire un palais. Il dresse la liste des tâches :

*(i)* Planter les fleurs des parterres,
*(ii)* Couvrir le toit,
*(iii)* Décorer l'intérieur à l'or,
*(iv)* Construire les murs,
*(v)* Creuser les fontaines,
*(vi)* Poser les fenêtres,
*(vii)* Installer la charpente,
*(viii)* Réaliser les soubassements.
*(ix)* Placer les colonnes,
*(x)* Installer les portes.

Dédale, son architecte, lui fait remarquer que certaines tâches dépendent d'autres tâches. Par exemple, les murs (tâche n° 4) précèdent les tuiles (tâche n° 2). En mathématiques, on dit que « précède » est une relation binaire. Nous verrons plus loin que cette relation possède des propriétés spéciales, qui en font même ce que l'on appelle une relation d'ordre. Nous la représenterons comme suit, voyez-vous pourquoi ?




*Monsieur et Madame*
*Dedériverpourtrouverlemax ont un enfant ...*

---

**Exercice 1 (Relation, relation d'équivalence).**
On appelle *relation binaire* entre les ensembles $A$ et $B$ un sous-ensemble de $A \times B$ :

$$R \subseteq A \times B.$$

Exemple : $A$ est l'ensemble des professeurs de votre lycée, $B$ est l'ensemble des cours de votre lycée et $R = \{(a, b) \in A \times B; a \text{ enseigne le cours } b\}$. Quand $(a, b) \in R$, on note $a \sim_R b$.

**1.** Quand $A = B$, on dit que

- $R$ est *réflexive* si $(a, a) \in R$ pour tout $a \in A$.
- $R$ est *symétrique* si $(a, b) \in R$ implique que $(b, a) \in R$ pour tout $a, b \in A$.
- $R$ est *transitive* si $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$ implique que $(a, c) \in R$ pour tout $a, b, c \in A$.

Dans chaque cas ci-dessous, laquelle (ou lesquelles) des propriétés ci-dessus est-elle vérifiée ?

**a.** $A$ est l'ensemble des humains et $R$ est la relation
$$R = \{(a, b) \in A^2, a \text{ est le cousin de } b\}.$$
**b.** $A$ est l'ensemble des humains et $R$ est la relation
$$R = \{(a, b) \in A^2, a \text{ est un ascendant } b\}.$$
**c.** $A$ est l'ensemble des droites de l'espace et $R$ est la relation
$$R = \{(a, b) \in A^2;\ a \text{ est parallèle à } b\}.$$
**d.** $A = \mathbb{Z}$ et $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2;\ m \text{ divise } a - b\}$ où $m > 0$ est un entier fixé.

**2.** Quand $R$ est réflexive, symétrique et transitive, on dit que $R$ est une *relation d'équivalence* et on appelle *classe* de $a \in A$ l'ensemble $[a] = \{b \in A, (a,b) \in R\}$. Dans les cas suivants, montrer que $R$ est une relation d'équivalence et préciser comment s'appelle la classe d'un élément en français.

**a.** $A$ est l'ensemble des humains et $R$ est la relation

$$R = \{(a,b) \in A, a \text{ a les mêmes parents que } b\}.$$

**b.** $A$ est l'ensemble des livres et $R$ est la relation

$$R = \{(a,b) \in A, a \text{ est du même auteur que } b\}.$$

### Commentaires sur l'Exercice 1

La notion de classe d'équivalence est très puissante en mathématiques : elle permet d'identifier des objets qui possèdent des caractéristiques communes et de travailler avec eux comme s'ils étaient égaux. C'est un fait courant : dans la vie de tous les jours, on dit qu'il est 3h au lieu de dire qu'il est 15h et on comprendrait que 27h désigne encore la même heure. De même, quand on raisonne sur des angles, on dira $130° + 170° = -60°$, ce qui est parfaitement valide du moment que l'on raisonne avec des classes d'équivalences.
Les classes d'équivalences ont une propriété particulière : elles partagent $A$ en sous-ensembles disjoints, on dit qu'elles forment une partition et que réciproquement, toute partition induit une relation d'équivalence.
Les classes d'équivalences de la question 1.c) forment le *plan projectif*.
La relation de la question 1.d) s'appelle la congruence modulo $m$ est notée usuellement

$$a \equiv b \mod m.$$

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ peut être défini comme l'ensemble des classes d'équivalences de certaines suites de nombres rationels modulo une certaine relation d'équivalence.

### Exercice 2 (Relation d'ordre, diagramme de Hasse).

Soit toujours une relation $R \subseteq A \times A$ sur un ensemble $A$.

**1.** On dit qu'une relation est *antisymétrique* si $(a,b) \in R$ et $(b,a) \in R$ impliquent que $a = b$. Une relation qui est réfléxive, antisymétrique et transitive s'appelle une *relation d'ordre* ou *ordre partiel*. On note parfois $(a,b) \in R$ par $a \leq_R b$. Les relations suivantes sont-elles des ordres partiels ?

**a.** $A = \mathbb{R}$, $R = \{(a,b) \in \mathbb{R}, b - a \in \mathbb{R}^+\}$.

**b.** $A = \mathbb{N}^*$ et $R$ est la relation de divisibilité, $a$ divise $b$, notée $a|b$ .

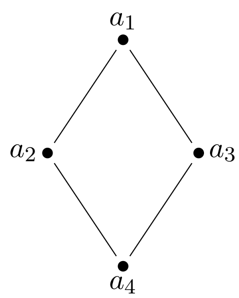
**c.** $A$ est l'ensemble des sous-ensembles de $[[n]] = \{1, 2, \dots, n\}$ où $n$ est un entier fixé. $R$ est la relation $a \leq_R b$ si $a$ est inclus dans $b$, notée $a \subseteq b$.

**2.** Un ordre partiel est dit *total* si on peut toujours comparer deux éléments : autrement dit, quel que soit $a, b \in A^2$, $a \leq_R b$ ou $b \leq_R a$. Reprendre les questions ci-dessus et dire si l'ordre partiel est total ou non.

**3.** Le couple $(A, R)$ s'appelle *ensemble partiellement ordonné* ou *poset*. Si $A$ est fini, on peut le représenter par un diagramme (dit *de Hasse*) où $b$ est placé au dessus de $a$ si $a \leq_R b$ et de plus $a$ est relié à $b$ par une arête s'il n'y a aucun élément compris entre $a$ et $b$.

**a.** Donner l'ensemble des comparaisons possibles dans le diagramme suivant




**b.** Dessiner le diagramme de Hasse de $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ muni de la relation de divisibilité.

**c.** Soit $A$ l'ensemble des sous-ensembles de $\{1, 2, 3\}$. Qui sont-ils ? Dessiner le diagramme de Hasse de $A$ muni de l'inclusion.

**d.** Comparer les deux derniers diagrammes.

### Commentaires sur l'Exercice 2

L'ordre 1.a) est l'ordre usuel sur les réels.

Attention : en mathématique « partiel » ne s'oppose pas à « total » : un ordre total est d'abord un ordre partiel. Comme une relation d'ordre, disons $\preccurlyeq$, n'est pas forcément totale, $a \not\preccurlyeq b$ n'est pas équivalent à $b \prec a$ : ceci n'est vrai que pour des relations d'ordre total.

### Exercice 3 (Minorant, minimal, minimum, infimum).

Nous considérons toujours un poset $\mathcal{P} = (A, \leq_{\mathcal{P}})$. On suppose que $C$ est une partie de $A$.

- On appelle *minorant* de $C$ tout élément $m$ de $A$ tel que pour tout $c \in C$, $m \leq_{\mathcal{P}} c$.
- On dit d'un élément $x$ de $C$ qu'il est *minimal dans* $C$ s'il n'a pas de prédécesseur dans $C$, c'est-à-dire que pour tout $c \in C$, $c \leq x$ implique que $c = x$.
- On appelle *plus petit élément* ou *minimum* de $C$ tout élément $m$ de $C$ tel que pour tout $c \in C$, $m \leq_{\mathcal{P}} c$.
- On appelle *borne inférieure* ou *infimum* de $C$ le plus grand des minorants.

**1.** Définir de même les notions de majorant, élément maximal dans $C$, plus grand élément de $C$ ou maximum et borne supérieure ou suprémum.

**2.** Dans chaque cas suivant, décrire, s'ils existent, l'ensemble des minorants de $C$, les éléments minimaux de $C$, le minimum de $C$, la borne inférieure de $C$

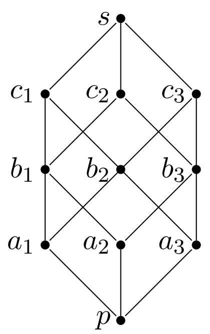
**a.** $\mathcal{P} = (\mathbb{R}, \leq)$, $C = \{1, 2\}$.

**b.** $\mathcal{P} = (\mathbb{R}, \leq)$, $C = \mathbb{R}_+$.

**c.** $\mathcal{P} = (\mathbb{R}, \leq)$, $C = \mathbb{R}_+^*$.

**d.** $\mathcal{P} = (\mathbb{R}, \leq)$, $C = \mathbb{R}$.

**e.** $\mathcal{P}$ est le poset dont le diagramme de Hasse suit,

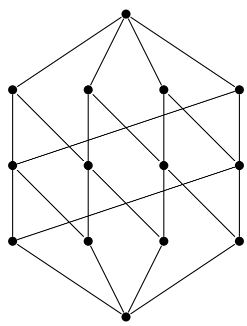


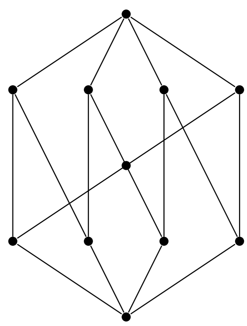

et $C = \{b_1, c_1, c_2\}$.

**f.** $\mathcal{P}$ est le même poset qu'à la question précédente et $C = \{c_1, c_2, c_3\}$.

**g.** $\mathcal{P}$ est le même poset qu'à la question précédente et $C = \{c_1, c_2\}$.

**3.** Dans les posets représentés ci-dessous, trouver, si possible un couple d'éléments ne possédant pas de borne inférieure.





## Commentaires sur l'Exercice 3

Il peut y avoir plusieurs minorants ou plusieurs éléments minimaux de $C$. Au contraire, il n'y qu'un seul minimum ou infimum (s'ils existent).

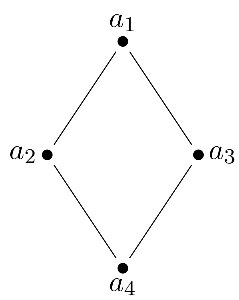
 

**Exercice 4 (Raffinement d'ordres partiels).**

On dit qu'un ordre $\preccurlyeq_1$ sur un ensemble $A$ est contenu dans un ordre $\preccurlyeq_2$ sur $A$ si pour tout $(a, b) \in A^2$, $a \preccurlyeq_1 b$ implique $a \preccurlyeq_2 b$. Le but de cet exercice très difficile est de montrer que toute relation d'ordre est l'intersection des ordres totaux qui la contiennent. Nous aurons besoin du résultat suivant :

« *Un poset, dont toute partie totalement ordonnée admet un majorant, possède un élément maximal (Lemme de Zorn).* »

**1.** On considère le poset $\mathcal{P} = (A, \trianglelefteq)$ dont le diagramme de Hasse est




Décrire les ordres totaux contenant $\trianglelefteq$. Vérifier que leur intersection égale $\trianglelefteq$.

**2.** Soit $\mathcal{P} = (A, \preccurlyeq)$ un poset. Soient $a, b \in A$ tels que $a \not\preccurlyeq b$. Montrer que la relation définie par

$$x \preccurlyeq^* y \quad \text{si} \begin{cases} x \preccurlyeq y \\ \text{ou} \\ x \preccurlyeq b \text{ et } a \preccurlyeq y \end{cases}$$

est un ordre sur $A$.

**3.** En supposant que $A$ est fini, montrer que l'ordre partiel $\preccurlyeq$ est l'intersection de tous les ordres totaux qui contiennent $\preccurlyeq$.

**4.** On suppose désormais que $A$ est quelconque.

**a.** On considère le poset $(\mathcal{PO}_{\preccurlyeq}(A), \subseteq)$ des ordres partiels sur $A$ contenant $\preccurlyeq$ ordonnés par l'inclusion. Montrer que les éléments maximaux de ce poset sont les ordres totaux.

**b.** Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{PO}_{\preccurlyeq}(A)$ une partie totalement ordonnée de ce poset. On appelle $\leq$ la réunion $\bigcup_{\trianglelefteq \in \mathcal{C}} \trianglelefteq$. Autrement dit, pour tout $(a, b) \in A$, $a \leq b$ s'il existe un ordre $\trianglelefteq$ appartenant à $\mathcal{C}$ tel que $a \trianglelefteq b$. Montrer que la relation $\leq$ est un ordre.

**c.** En déduire que que $\mathcal{C}$ est majorée dans $(\mathcal{PO}_{\preccurlyeq}(A), \subseteq)$

**d.** En déduire que l'ordre partiel $\preccurlyeq$ est l'intersection de tous les ordres totaux qui contiennent $\preccurlyeq$.

## Commentaires sur l'Exercice 4

Ce résultat, de 1930, est dû à Edward Szpilrajn.

Le lemme de Zorn est, du point de vue théorique, une variante de l'*axiome du choix*, qui est un des piliers des mathématiques. On considère que c'est un axiome, c'est à dire une brique de base non discutable et admise comme vraie pour développer les mathématiques, démontrer des théorèmes, etc. Beaucoup de résultats ne pourraient être démontrés sans l'axiome du choix. Néanmoins, utiliser l'axiome du choix en mathématiques implique que le résultat que l'on obtient n'est pas « constructible » : les objets obtenus au cours des démonstrations ne peuvent pas être décrits comme les produits d'une « recette » que l'on se contenterait de suivre. L'axiome du choix dit qu'un certain objet existe, mais ne dit pas comment le trouver. Face à ce problème, certains mathématiciens considèrent qu'il faut refuser l'axiome du choix et préfèrent travailler avec des mathématiques plus pauvres mais *constructives*.

# Corrections

### Correction de l'Exercice 1

**1.a.** La relation n'est pas réflexive car nul n'est son propre cousin. La relation est symétrique, le rôle de $a$ et $b$ est interchangeable. Elle n'est pas transitive, car on peut considérer le cas où $a$ et $b$ sont cousins par le père de $b$ ; $b$ et $c$ sont cousins par la mère de $b$ : $a$ et $c$ ne sont pas nécessairement cousins.

**b.** La relation n'est ni réflexive ni symétrique mais elle est transitive.

**c.** La relation est réflexive, symétrique et transitive.

**d.** La relation est réflexive, symétrique et transitive.

**2.a.** La relation est réflexive, symétrique et transitive ; la classe de $[a]$ s'appelle la fratrie de $a$.

**b.** La relation est réflexive, symétrique et transitive ; la classe de $[a]$ s'appelle l'œuvre littéraire de $a$. □

### Correction de l'Exercice 2

**1.a.** Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $a - a = 0 \in \mathbb{R}^+$, donc $a \leq a$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $a \leq b$ et $b \leq a$, c'est-à-dire si $b - a \in \mathbb{R}^+$ et $a - b = -(b - a) \in \mathbb{R}^+$, alors $a - b$ est nul. D'où $a = b$. Enfin, si $a \leq b$ et $b \leq c$, c'est-à-dire si $b - a \in \mathbb{R}^+$ et $c - b \in \mathbb{R}^+$, alors $c - a = c - b + b - a$ est la somme de deux éléments de $\mathbb{R}_+$ donc appartient à $\mathbb{R}_+$.

**b.** Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $a$ se divise lui-même. Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si $a$ divise $b$ et $b$ divise $a$, alors $a = \pm b$, mais les deux nombres sont positifs, donc $a = b$. Pour tout $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$, si $a$ divise $b$ et $b$ divise $c$, alors $a$ divise $c$. Ainsi la divisibilité est un ordre partiel.

**c.** Si $a$ est un sous-ensemble de $[[n]]$, alors $a$ est inclus dans $a$. Si $a$ et $b$ sont deux sous-ensembles de $[[n]]$ et si $a \subseteq b$ et $b \subseteq a$, alors $a = b$. Si $a$, $b$ et $c$ sont trois sous-ensembles de $[[n]]$ et si $a \subseteq b$ et $b \subseteq a$, alors $a \subseteq c$. Donc l'inclusion est une relation d'ordre.

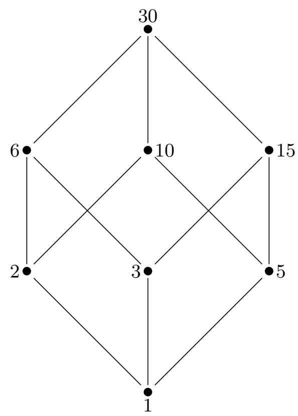
**2.a.** L'ordre de $\mathbb{R}$ est total, car soit $b - a \in R^+$, sinon $b - a \in \mathbb{R}^-$ mais alors $a - b \in \mathbb{R}^+$.

**b.** La divisibilité est un ordre partiel car 2 et 3 ne sont pas comparables.

**c.** L'inclusion est un ordre partiel car $\{1\}$ et $\{2\}$ ne sont pas comparables.

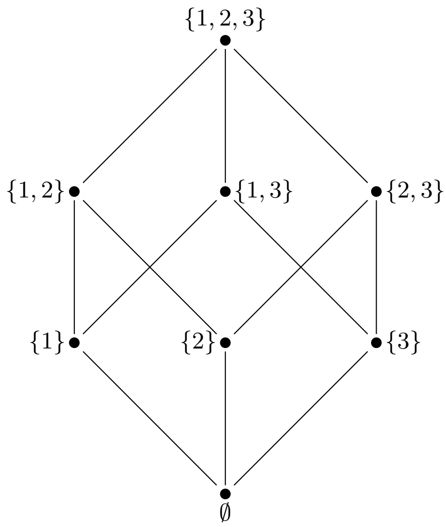
**3.a.** On a $a_2 \leq a_1$, $a_4 \leq a_2$, $a_3 \leq a_1$, $a_4 \leq a_3$ et $a_4 \leq a_1$ ainsi que $a_i \leq a_i$ pour $1 \leq i \leq 4$.

**b.**



**c.**




**d.** Les deux diagrammes sont égaux, à l'étiquetage des sommets près. On dit que les deux posets sont *isomorphes.* □

**Correction de l'Exercice 3**

**1.** Les définitions sont les suivantes.

- On appelle *majorant* de $C$ tout élément $M$ de $A$ tel que pour tout $c \in C$, $m \geq_{\mathcal{P}} c$.
- On dit d'un élément $x$ de $C$ qu'il est *maximal dans* $C$ s'il n'a pas de successeur dans $C$, c'est-à-dire que pour tout $c \in C$, $c \geq x$ implique que $c = x$.
- On appelle *plus grand élément* ou *maximum* de $C$ tout élément $M$ de $C$ tel que pour tout $c \in C$, $M \geq_{\mathcal{P}} c$.
- On appelle *borne supérieure* ou *suprémum* de $C$ le plus petit des majorants.

**2.a.** Minorants : l'ensemble $]-\infty, 1]$. Éléments minimaux de $C$ : $\{1\}$. Plus petit élément de $C$ : 1. Borne inférieure de $C$ : 1.

**b.** Minorants : $\mathbb{R}_-$. Éléments minimaux de $C$ : $\{0\}$. Plus petit élément de $C$ : 0. Borne inférieure de $C$ : 0.

**c.** Minorants : $\mathbb{R}_-$. Éléments minimaux de $C$ : il n'y en a pas. Plus petit élément de $C$ : il n'existe pas. Borne inférieure de $C$ : 0.

**d.** Minorants : il n'y en a pas. Éléments minimaux de $C$ : il n'y en a pas. Plus petit élément de $C$ : il n'existe pas. Borne inférieure de $C$ : elle n'existe pas.

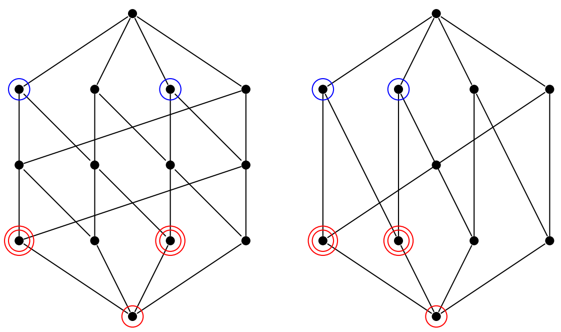
**e.** Minorants : $\{b_1, a_1, a_2, p\}$. Éléments minimaux de $C$ : $\{b_1\}$. Plus petit élément de $C$ : $b_1$. Borne inférieure de $C$ : $b_1$.

**f.** Minorants : $\{a_1, a_2, a_3, p\}$. Éléments minimaux de $C$ : $\{c_1, c_2, c_3\}$. Plus petit élément de $C$ : il n'existe pas. Borne inférieure de $C$ : il n'existe pas.

**g.** Minorants : $\{b_1, a_1, a_2, a_3, p\}$. Éléments minimaux de $C$ : $\{c_1, c_2\}$. Plus petit élément de $C$ : il n'y en a pas. Borne inférieure de $C$ : il n'y en a pas car $b_1$ et $a_3$ sont incomparables.

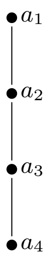
**3.** Nous entourons ci-dessous en clair un couple et en foncé ses minorants. Nous entourons en double deux minorants maximaux non-comparables. Ceci prouve qu'il n'y a pas de borne inférieure.



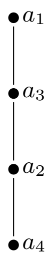
□

**Correction de l'Exercice 4**

**1.** Dans un ordre total, toutes les couples sont ordonnés. Or il y a $4 \cdot 3/2 = 6$ couples d'éléments distincts, dont l'ordre de cinq sont déjà déterminés (d'après l'un des exercices précédents). Il ne reste qu'à choisir soit $a_2 \leq a_3$, soit $a_3 \leq a_2$. Les ordres totaux obtenus sont alors :




ou




De façon ensembliste, on a $\trianglelefteq_1 = \trianglelefteq \cup \{(a_2, a_3)\}$ et $\trianglelefteq_2 = \trianglelefteq \cup \{(a_3, a_2)\}$. Il est donc clair que $\trianglelefteq = \trianglelefteq_1 \cap \trianglelefteq_2$.

**2.** Il faut vérifier les trois axiomes qui définissent une relation d'ordre. Soient $x, y, z \in A$. Pour la réflexivité, on a $x \preccurlyeq^* x$ car $x \preccurlyeq x$. Pour l'antisymétrie, si $x \preccurlyeq^* y$ et $y \preccurlyeq^* y$ alors quatre cas peuvent se produire :

- $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$ ce qui conduit à $x = y$ car $\preccurlyeq$ est un ordre,
- $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq b$ et $a \preccurlyeq x$, alors par transitivité $a \preccurlyeq b$ ce qui est exclu,
- ou encore $x \preccurlyeq b$, $a \preccurlyeq y$, $y \preccurlyeq b$ et $a \preccurlyeq y$, mais alors $a \preccurlyeq b$ ce qui est exclu.

Le cas restant se traite comme le second cas. Enfin pour la transitivité, si $x \preccurlyeq^* y$ et $y \preccurlyeq^* z$, alors soit $x \preccurlyeq y \preccurlyeq z$ d'où $x \preccurlyeq z$, soit $x \preccurlyeq y \preccurlyeq b$ et $a \preccurlyeq z$, soit $x \preccurlyeq b$ et $a \preccurlyeq y \preccurlyeq z$, soit $a \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq b$ ce qui n'est pas possible

**3.** Il est clair que l'ordre $\preccurlyeq$ est contenu dans l'intersection des ordres totaux le contenant. Il reste à démontrer que si $a \not\preccurlyeq b$ pour un certain couple $(a, b)$, alors il existe un ordre total $\trianglelefteq$ contenant $\preccurlyeq$ pour lequel $a \ntrianglelefteq b$, c'est-à-dire (comme l'ordre est total) $b \triangleleft a$.

On a vu à la question précédente comment raffiner $\preccurlyeq$ de sorte que $b \preccurlyeq^* a$. Si le nouvel ordre $\preccurlyeq^*$ n'est pas total, on ré-applique le procédé tant qu'il existe des couples $(c, d)$ non comparables dans $A \times A$. Comme $A \times A$ est fini, il n'est nécessaire de le faire qu'un nombre fini de fois et l'on obtient un ordre total $\trianglelefteq$ tel que $b \trianglelefteq a$ comme attendu.

**4.a.** Si un ordre n'est pas total, alors il existe $(a, b) \in A^2$ non comparables et la question 1 montre comment trouver un ordre strictement plus grand pour l'inclusion. Donc cet ordre n'est pas maximal.

Par ailleurs, si un ordre $\preccurlyeq$ n'est pas maximal, alors, il existe un ordre $\preccurlyeq'$ tel que $\preccurlyeq \subset \preccurlyeq'$ (inclusion stricte). Soient deux éléments $a$ et $b$ distincts tel que $a \preccurlyeq' b$ et $a \not\preccurlyeq b$. Mais alors $b \not\preccurlyeq a$, car sinon on aurait encore $b \preccurlyeq' a$. Donc $a$ et $b$ ne sont pas comparables et $\preccurlyeq$ n'est pas total.

**b.** Soit à présent $\mathcal{C}$ un ensemble totalement ordonné pour l'inclusion d'ordres sur $A$ et posons $\leq = \bigcup_{\trianglelefteq \in \mathcal{C}} \trianglelefteq$. Montrons que la relation $\leq$ est un ordre [1]. Il nous faut vérifier les trois propriétés définissant la notion de relation d'ordre.

- La relation $\leq$ est clairement réflexive.
- Supposons que $a \leq b$ et $b \leq a$. Alors il existe des ordres $\trianglelefteq_1$ et $\trianglelefteq_2 \in C$ tels que $a \trianglelefteq_1 b$ et $b \trianglelefteq_2 a$. Comme l'ordre de $\mathcal{PO}_{\preccurlyeq}(A)$ sur $\mathcal{C}$ est total, deux situations peuvent se produire : soit $\trianglelefteq_1 \subseteq \trianglelefteq_2$ soit $\trianglelefteq_2 \subseteq \trianglelefteq_1$. Dans le premier cas, on en déduit que $a \trianglelefteq_2 b$, donc par antisymétrie de $\trianglelefteq_2$, $a = b$. Ceci montre que la relation $\leq$ est antisymétrique. On raisonne de même dans l'autre cas.
- Enfin, supposons que $a \leq b$ et $b \leq c$, alors il existe des ordres $\trianglelefteq_1$ et $\trianglelefteq_2 \in C$ tels que $a \trianglelefteq_1 b$ et $b \trianglelefteq_2 c$. Comme l'ordre sur $\mathcal{C}$ est total, soit $\trianglelefteq_1 \subseteq \trianglelefteq_2$ soit $\trianglelefteq_2 \subseteq \trianglelefteq_1$. Dans le premier cas, on en déduit que $a \trianglelefteq_2 b$, donc par transitivité $a \trianglelefteq_2 c$ et finalement $a \leq c$. Dans le second cas, on fait de même. Ainsi la relation $\leq$ est transitive.

Donc $\leq$ est un ordre.

**c.** Nous observons que l'ordre construit à la question précédante est par construction un majorant de $\mathcal{C}$.

**d.** Le lemme de Zorn appliqué au poset $(\mathcal{PO}_{\preccurlyeq^*}(A), \subseteq)$ montre qu'il existe un élément maximal disons $\leq$. Cet ordre $\leq$ est un ordre total qui contient $\preccurlyeq$ et par construction vérifie que $a \not\leq b$. On peut donc raisonner comme dans le cas où $A$ est fini. $\square$

1. Attention : en général, l'union d'ordres quelconques n'est pas un ordre, c'est bien pour cela qu'il faut le montrer dans ce cas particulier !