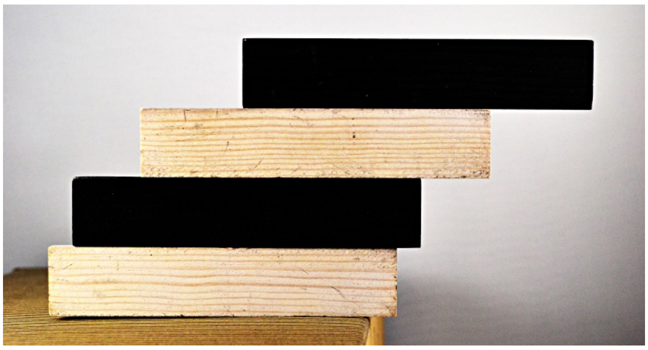
Systèmes linéaires : le plongeoir infernal

L. Gerin

Niveau : Terminale
Difficulté : ★★
Durée : moins d'une heure
Rubrique(s) : Algèbre linéaire (systèmes linéaires), Géométrie, Modélisation.

Dans les classes du secondaire, vous avez appris à résoudre des équations et des systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Souvent le plus délicat est de modéliser l'énoncé afin d'obtenir un système. Dans cet atelier, on part d'un problème de géométrie, le plus délicat sera de trouver le système à résoudre...

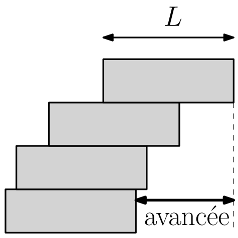
La petite histoire...
Pour le bord de sa piscine, Vincent aimerait construire le plongeoir le plus long possible. Mais comme il aime les défis, il voudrait le faire sans colle ni ciment, est-ce possible ? Jusqu'où peut-on aller en empilant les briques une à une, en les décalant à chaque fois un petit peu ?



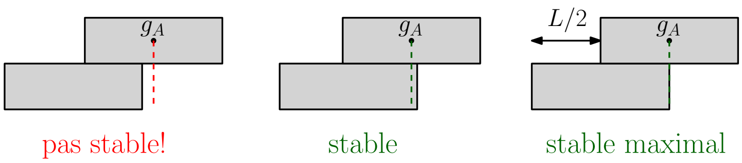
Il commence par faire une maquette mais c'est plus fort que lui : il veut *démontrer* que c'est possible...

Monsieur et Madame
Bertienne ont un fils détective...

Exercice 1 (Empilement de briques).
On souhaite déterminer l'empilement de 4 briques identiques de longueur L qui a « l'avancée » dans le vide la plus longue possible, et qui ne tombe pas !

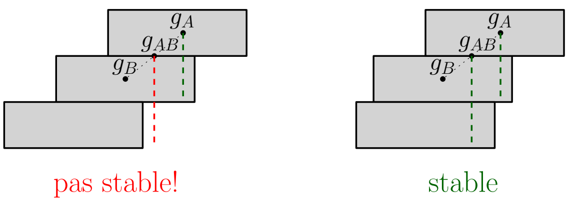


Pour pouvoir étudier ce problème de façon mathématique, nous allons faire une hypothèse physique : les briques ont toutes les mêmes dimensions, et sont faites du même matériau homogène. Ceci nous assure que le centre de gravité d'une brique est bien situé au centre du parallélépipède formé par la brique.
Pour comprendre comment s'assurer que l'empilement est stable, regardons ce qui se passe avec une brique A au-dessus d'une brique B : le centre de gravité g_A de la brique A doit être au-dessus d'un point de la brique B :



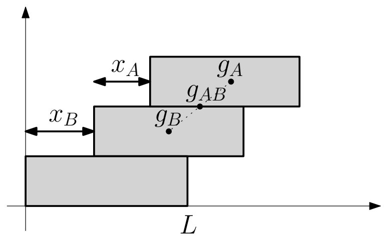
Et on voit alors qu'on peut décaler les deux briques d'**au maximum** $L/2$.
Avec 3 briques A, B, C, un empilement doit réunir deux conditions pour être stable :

- Comme avant, le centre de gravité g_A de A doit être au-dessus d'un point de B,
- Le centre de gravité de A et B, noté g_{AB}, et qui est au milieu du segment d'extrémités g_A et g_B, doit être au-dessus d'un point de C.



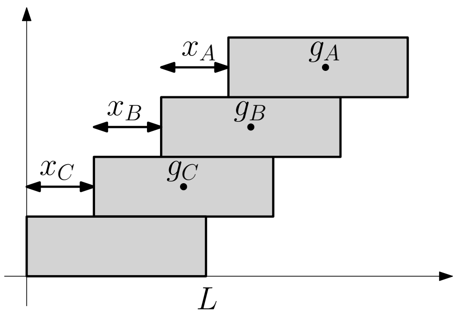
1. Notons x_A et x_B les décalages successifs des briques les unes par rapport aux autres. Quelles sont les inégalités que doivent vérifier x_A et x_B pour que l'empilement soit stable ?
Pour bien poser les équations et résoudre ce problème, on conseille de placer un repère en bas à gauche de la brique C :

 Creative Commons :



2. En déduire que l'on peut obtenir au maximum une avancée de $3L/4$ avec un empilement stable.

3. Déterminer le meilleur empilement pour 4 briques. Pour cela, nous admettrons que l'abscisse du centre de gravité g_{ABC} de 3 briques est la moyenne des abscisses des 3 centres de gravité.



4. (Question subsidiaire) En s'inspirant de l'exemple avec 4 briques, comment feriez-vous pour avoir le meilleur empilement avec n briques ?

Commentaires sur l'Exercice 1

Avec cette stratégie, on peut se demander s'il est possible en théorie de fabriquer un plongeoir *arbitrairement* grand. Par exemple, est-ce que l'on peut fabriquer un plongeoir stable qui ait une avancée de 100 km au-dessus du vide ? La réponse est oui, à condition d'avoir suffisamment de briques : l'explication se trouve dans l'atelier « *Achille, la Tortue et Riemann* ».
On peut aussi se demander si d'autres stratégies permettent de fabriquer un plongeoir encore plus grand. Si l'on s'autorise à placer plusieurs briques à la même hauteur (pour faire contrepoids), des mathématiciens ont découvert en 2007 que cela était possible d'aller beaucoup plus loin. Ils ont écrit l'article suivant :

Mike Paterson, Yuval Peres, Mikkel Thorup, Peter Winkler, Uri Zwick. *Maximum overhang*. Disponible en ligne : `http://arxiv.org/abs/0707.0093`.

Mais aujourd'hui on ne connaît toujours pas le meilleur plongeoir, à vous de jouer !

 Creative Commons :

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. Le centre de gravité g_A de la brique A a pour abscisse $x_A + L/2$. Il doit être au maximum à la verticale de la brique B, donc $x_A + L/2 \leq L$, c'est-à-dire $x_A \leq L/2$.
Le centre de gravité g_AB de A et B a pour abscisse

$$\frac{\text{abscisse}(g_A) + \text{abscisse}(g_B)}{2} = \frac{(x_A + x_B + L/2) + (x_B + L/2)}{2} = \frac{x_A + 2x_B + 2 \times L/2}{2}.$$

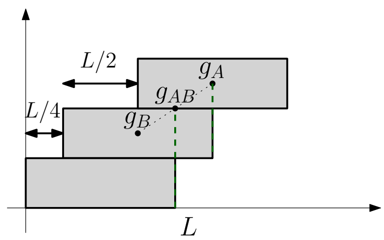
Donc $x_A/2 + x_B + L/2 \leq L$, c'est-à-dire $x_A/2 + x_B \leq L/2$. Finalement, l'empilement est stable lorsque

$$\begin{cases} x_A \leq L/2, \\ x_A/2 + x_B \leq L/2. \end{cases}$$

2. L'empilement est maximal lorsque les centres de gravité sont à chaque fois **pile** au-dessus de l'extrémité de la brique du dessous. C'est donc lorsqu'il y a **égalité** dans le système précédent :

$$\begin{cases} x_A = L/2, \\ x_A/2 + x_B = L/2. \end{cases}$$

On remplace x_A par $L/2$ dans la deuxième égalité et on trouve $x_A = L/2$, $x_B = L/4$.
L'avancée vaut alors $L/2 + L/4$.



3. Pour que l'empilement de 4 briques soit stable, il faut déjà que les deux inégalités précédentes restent vraies :

$$\begin{cases} x_A \leq L/2, \\ x_A/2 + x_B \leq L/2. \end{cases}$$

Il faut en plus que g_{ABC} soit à la verticale d'un point de la brique D. L'abscisse de g_{ABC} est

$$\begin{aligned} &\frac{\text{abscisse}(g_A) + \text{abscisse}(g_B) + \text{abscisse}(g_C)}{3} \\ &= \frac{(x_A + x_B + x_C + L/2) + (x_B + x_C + L/2) + (x_C + L/2)}{3} \\ &= \frac{x_A + 2x_B + 3x_C + 3 \times L/2}{3}. \end{aligned}$$

Donc on doit avoir

$$x_A/3 + 2x_B/3 + x_C + L/2 \leq L,$$

c'est-à-dire $x_A/3 + 2x_B/3 + x_C \leq L/2$.

 Creative Commons :

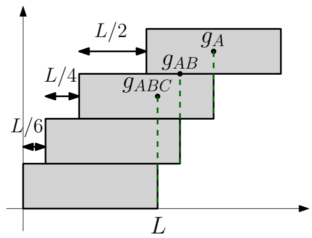
Comme tout à l'heure, on veut avoir l'empilement avec l'avancée **maximale**, donc on cherche à avoir des **égalités** :

$$\begin{cases} x_A = L/2, \\ x_A/2 + x_B = L/2, \\ x_A/3 + 2x_B/3 + x_C = L/2 \end{cases}$$

On trouve alors encore $x_A = L/2$, $x_B = L/4$. On remplace alors ces valeurs dans la troisième équation et on trouve :

$$(L/2)/3 + +2(L/4)/3 + x_C = L/2,$$

c'est-à-dire $x_C = L/6$.
L'avancée vaut alors $L/2 + L/4 + L/6$.



4. Avec n briques, on a envie de faire des décalages $\frac{L}{2}$, $\frac{L}{4}$, $\frac{L}{6}$, $\frac{L}{8}$, $\ldots$, $\frac{L}{2(n-1)}$ et ça marche... à vous de le vérifier ! $\square$

 Creative Commons :